# GEOMETRICA DEMONSTRATIO
# THEOREMATUM
## HUGENIANORUM



# GEOMETRICA DEMONSTRATIO THEOREMATUM HUGENIANORUM

CIRCA

LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM,

*Qua occasione plures Geometricę Methodi exhibentur circa Tangentes, Quadraturas, Centra gravitatis, Solida, &c. variarum curvarum, uti infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, &c. Aliæque Geometricæ Veritates illustrantur.*

ADDITA EPISTOLA GEOMETRICA AD P. THOMAM CEVAM S. J.

*AUCTORE*

D. GUIDONE GRANDO

CREMONENSI,

Monacho Camaldulensi, & in Almo Pisano Lyceo Publ. Phylosophiæ Professore.



*AD SERENISSIMUM*

FERDINANDUM III.

MAGNUM ETRURIÆ PRINCIPEM.





FLORENTIÆ, MDCCI.

Typis Regiæ Celsit. Apud Petrum Antonium Brigonci.

*Superiorum Permissu.*





SERENISSIME

# PRINCEPS.



*Ingularis in Bonas Artes, maximèque in Mathematicas Disciplinas Ser. Cels. Tuæ Genius, atque in earumdem cultores MEDICEO PRINCIPE verè digna Propensio, & animum, & stimulos addiderunt, ut apud eamdē Celsitudinem Tuam Opusculum hoc Geometricum collocarem. Enimverò maximum operæ compendium facturum me intellexi, ubi speculatio-*

*nes*

*nes has meas ejusmodi Principi consecrarem, apud quem, & Scientiæ sublimitas, & Argumenti præstantia, & Doctrinæ utilitas nonnisi superfluè commendanda foret, nec repetitis, aut votis, aut precibus opus esset ad illius Tutelam Operi simul, Auctorique impetrandam. Horum scilicet studiorum pretium abundè nosti, Principum Optime, imò & nos ipsos non opere minùs, quàm verbo doces, quanti ipsa facienda sint, dum in illorum præsidium, qui eadem promovere student, ultrò Ipse descendis, quò confidentiùs, & securiùs ad Te accedere non vereantur. Omne igitur officium satis explevero, si citra verborum circuitum, brevi dumtaxat, simplicique narratione, quale mihi argumentum hìc tractandum susceperim, aperuero.*

*Clarissimus Vir Christianus Hugenius (notum Celsitudini Tuæ nomen, pro Litteraria, qua tantoperè excellis, Eruditione Tua, in Astronomicis præsertim, Physicis, & Geometricis rebus, quas ille disciplinas summè illustravit) ex* Logisticæ, *seu* Logarithmicæ *Lineæ proprietatibus nonnullas planè admirabiles ad calcem suæ Diatribæ de causa Gravitatis, citra demonstrationem ullam, nudè proposuit, quibus*

*ipse-*

*ipsemet usus fuerat, ad arduas physicæ veritates in eodem tractatu indicandas, variorumq; problematum determinationem, ad motum corporum, seu per aerem projectorum, seu proprio pondere descendentium, computata etiam medii resistentia, pertinentium expediendam. Quum itaque insignes adeò, ac geometrica contemplatione per se dignissimas esse proprietates illas animadverterem, ac præterea in Philosophicis etiam usum habere posse, è re futurum judicavi, ut iisdem demonstrandis operam darem, quò pleniùs de ipsarum veritate constaret, eòq; tutiùs deinceps ad Physicam transferrentur; Longissimè siquidem à Geometriæ ditione exulare cognoveram Pythagoricum illud,* Ipse dixit, *parvamque adeò solius pronunciantium Auctoritatis in hac Scientia rationem haberi; atq; id quidem meritò, quippe & Magnorum aliquando Virorum determinationibus absque demonstratione propositis (seu methodi, seu applicationis, seu calculi lapsu, quem in extendenda demonstratione facillimè animadvertissent) falsitatem irrepsisse deprehendimus. Evidentiam itaque in ejusmodi esse exigendam, quæ Geometricis potissimùm ratiociniis est concilianda. Geometricè idcircò sin-*

ga-

*gulas ex propositis ab Hugenio Logisticæ Proprietatibus demonstrare aggressus sum, nec uno plerumque modo, sed pluribus, iisque admodùm generalibus, atque ad infinitarum Parabolarũ, Hyperbolarum, Spiralium, aliarumq; variarũ curvarum Tangentes, Quadraturas, Solida determinanda conducentibus, ut non soli Logisticæ, sed omnibus ferè sub Geometricam considerationem cadentibus figuris, præsentis Opusculi utilitas communis esset.*

*Et hic quidem, SERENISS. PRINCEPS, hujus Commentarioli mei scopus, hæc summa est, quod cùm per se se exiguum sit, suique ratione Auctoris obscurum, Tui Nominis tamen Luce ejus fronti affulgente, non usque adeò vilescere poterit, imò & supra conditionis, atque indolis suæ sortem sperare incipiet; quamquàm id unum mihi abundè suffecturum sit, ut mei erga S.C.T. obsequii, grateq; erga Augustissimam MEDICEAM Domum, cui tot beneficiis devincor, observantiæ, acceptum Tibi pignus, perpetuumque in omnem posteritatis memoriam monumentum existat.*

*Ex Monast. Angelorum Flor. Idib. Julii MDCCI.*

*Sereniss. Celsitud. Tuæ*

*Humillimus, Addictiss. atque Obsequentiss. Famulus*
D. Guido Grandus Monachus Camald.



# AD LECTOREM
# PRÆFATIO.



1 COnsuetudinis est apud Geometras vetustissimæ, ut quæ ab aliis sine demonstratione proposita sunt, sive Theoremata, sive Problemata, sibimet ostendenda, ac geometricè confirmanda assumant, vel exercitationis propriæ, vel communis utilitatis gratia, ut certa ab incertis, à falsis vera secerni possint, atque hæc tutò recipi, ac in usum, si quem habent, converti, illa tanquam spuria, & fallaciter asserta respui, & amandari; id vel ex uno Archimede constare potest, qui in Præfatione ad Libros Spiralium, Cononem summis laudibus celebrat, ejusque inventa Mathematicis sine demonstratione proposita, sibi demonstranda assumit; id quod tã accuratè, tantoq; ingenio præstitit, *ut*, Bullialdo teste, *in sui admirationem, cùm æquales, tùm posteros converterit; laudum titulos, nullo oblivionis situ inducendos, meruerit, earumque* (Spiralium) *inventori Cononi gloriam, palmamque præripuerit*. Enimverò qui in aliorum propositionibus demonstrã-

dis operam collocant, quàm arduam, difficilemque in se provinciam suscipiant, Vir Cl. Galilæus in Trutinatore, *pag.* mihi 48. luculenter ostendit, dum ait: *Longè sublimioris ingenii est alieni Problematis enodatio, aut ostensio Theorematis, quàm novi cujuspiam inventio; Hæc quippe fortunæ in incertum vagantibus obviæ plerumque esse solet; tota verò illa, quanta est, studiosissimam attentæ mentis, in unum aliquem scopum collimantis, ratiocinationem exposcit.*

2 Eumdem & ipse pulverem agitare aggressus, quemadmodùm ante biennium Vivianea Problemata Tibi geometricè demonstrata obtuli, innumeris aliis veritatibus, seu planè novis, seu majori compendio ex prolixa Veterum supellectili deductis, Conicorumque præsertim Fornicum Tetragonismo locupletata; ita nunc HUGENIANA THEOREMATA, longè adhuc plurium speculationum campum, pro variis, iisque generalibus methodis, quibus in eorumdem demonstratione uti placuit, aperientia, communicare proposui. Seriùs id quidem, si Theorematum Hugenii propositionem spectes, illa quippe ad calcem Diatribæ *de Causa Gravitatis*, Tractatui *de Lumine* ejusdem Auctoris adnexæ, usque ab Anno 1690. Lugduni Batavorum excusa jam prostant; Sin verò eadem animadvertēdi copiā ante paucos mēses mihi nunc primùm factam attendas, satis adhuc tempestivè. Hoc scilicet Anno dumtaxat, quum Pisis degerem, & obeundis Phylosophicæ Cathedræ, ad quam Regiæ Magni Etruriæ Ducis Celsitudinis Bene-

fi-

ficentia nuper vocatus fueram, muneribus incumberem, apud Humanissimum æquè, ac Nobilissimum Juvenem Lucam Albizium S.Stephani Equitem, in his, quæ ad Geometriam, ad Physicam, multiplicemque Eruditionem spectant, apprimè versatum, prælaudati Hugeniani Tractatus exemplar tandem invenire, ac sedulò evolvere potui. Rapuit animum statim Propositionum illarum, quæ & scitu jucundæ, & vestigatu difficiles videbantur, Utilitas, atque Elegantia, inde siquidem, ipsomet Hugenio fatente, pendere videbam, quæ Vir Clarissimus de Gravium projectione perpendiculari, & obliqua, eorumque descensu pronunciaverat, in hypothesi, quòd resistentiæ mediorum in eadem ratione crescerent, cum velocitatibus corporum, utì eatenus creditum fuerat; Ac de Physicis quidem Propositionibus vix sollicitus fui, quum jam de hypothesi non conveniret, majorque, Hugenio teste, se oblatura esset in ipsarum demonstratione difficultas, quàm quæ rei pretio compensaretur.

3 De Geometricis secus apud me statui: legeram apud Serenum Antistensem Epist. ad Cyrum, præfixa lib. 1. de sect. cylindri. *Absurdum omninò videri, Geometras ipsos de Problemate Geometrico sine demonstratione quicquam affirmare;* & quamvis longissimè abessem ab ejusmodi consuetudine generaliter idcircò damnanda, quum scirem, justis de causis, seu temporis inopia, seu brevitatis studio, sive exercitationis Lectorum gratia, id aliquando licere, quemadmodum & nobis, tum in proximè edito, tum in præsen-

§ 2 ti

ti etiam Opuſculo nonnulla exciderunt citra demonſtrationem aſſerta, Geometriæ tamen, ac Phyſicæ promovendæ plurimùm intereſſe putavi, ut miranda hæc Theoremata ad Logiſticam pertinentia tandem demonſtrarentur, è quibus, quemadmodùm illæ, quas ſupra ex Hugenio laudabam, ita aliæ, & aliæ Phyloſophicæ Veritates certioribus hypotheſibus innixæ profluere poſſent, quamdiù autem illa per legitimam demonſtrationem firmas radices non agerent, inculta planè, ac ſterilia jacerent. Et proprio igitur genio, & Amicorum ſtimulis accedentibus, ut in Logiſticæ Proprietatum ab Hugenio propoſitarum veritatem inquirerem, de iiſdem accuratè demonſtrandis cogitare cœpi. Quod quidem fœliciùs, quàm ab initio ſperaveram, deinde ſucceſſit, paucarum quippe horarum meditatione, octo priorum Theorematum (quinto excepto, quod abſtruſiorem ſibi poſcere indaginem prævideram) demonſtrationem inveni, nec multis poſt diebus reliqua omnia enucleavi, præter duodecimum, tertiumdecimum, ac quintum jam ab initio intermiſſum, quorum Veritas, ut in apertam lucem, vel ipſa ſponte prodiret, vel educi ſe non invita pateretur, longioris operæ officiis invitanda, roganda, ac tantùm non per vim extrahenda fuit, nobiliorem quippe manum fortaſſe expectās, obſcuri hominis conatus refractaria dedignabatur.

4 Sed quorſum, inquies, à tanto Viro propoſita in examen vocare, & ad demonſtrationis amuſſim expendere oportuerat? An non ſatis tutò admitti po-

te-

terant, citra suspicionem ullam falsitatis, vel hoc ipso, quòd Acutissimus ille, & tot nominibus celebris Geometra rem ita se habere fidenter asseruerat? Archimedi, quidquid diceret, credendum deinceps esse Hyeron Syracusius, & Gelon Siciliæ Rex pronunciarunt, apud Proclum *lib.* 2. *cap.* 3. postquàm Navim contra omnium opinionem loco movisset, & Artificis fraudem ex Coronæ pondere ad calculos revocasset; Quid ni igitur, citra aliam indaginem, & Christiano Hugenio credimus, post fœliciter detectum Saturniũ Annulum, post ostensas Curvarum Evolutarum proprietates, Cycloidis longitudinem demonstratam, Pendulique oscillationes ad isochronismum revocatas, ut de aliis taceamus præclaris inventis, quibus Physicam, Astronomiam, & Mathesim denique universam insigniter illustravit? Hæc certè si Archimedis tempore proposita fuissent, non minùs vestigatu ardua, inventuque difficilia censeri poterant, quàm minimæ potentiæ ad maximum pondus movendum per machinam elevatio, vel aurea corona permixti argenti discretio.

5 Ultrò ipse fateor, dignos esse summos Geometras, utpotè Veritatis commercio maximè omnium assuetos, quibus, etiam eorum, quæ pronunciant, demonstrationem reticentibus, fides nihilominus habeatur; neque enim *Mathematicos* concesso *Historicis* privilegio quis jure fraudaverit, quum ipsa *Geometria* à Pythagora *Historia* appellari consueverit, teste Jamblico in ejus vita, cap. 18. imò longè potior illius

sit,

ſit, quàm iſtius ratio, quippe nulla ex parte, aut à lubricis famæ rumoribus, aut ab incertis documentis, aut à præoccupato partium ſtudio ſibimet imponi patitur Geometra, quum quidquam aſſerit, ſed quod evidenti dumtaxat ratione apud ſe conſtiterit pronunciare ſolet; quo nomine perfectam Hyſtoriæ ideã Geometria præbet, quam utinam imitarentur qui Hiſtoricos agunt, nec quicquam temerè ſolis conjecturis ducti, prout ſibi ſomniaverint, deſcriberent, ſed ea dumtaxat, quibus (quantùm materia patitur) demonſtrandis ſe idoneos, & paratos ſentiunt! Nil tamen vetat, quin & ipſi Geometræ, cùm homines ſint, lapſibus quoque obnoxii eſſe poſſint, primo ſiquidem obtutu veri ſpeciem prætendere poteſt fallax quoddã ratiocinium Geometrarum mẽtibus uno impetu objectum, illoſque in errorem inducere, à quo facilè ſibi caviſſent, ſi ſpeculationum ſuarum demonſtrationẽ per extenſum adducere, ac per ſingulas partes attentiùs expendere voluiſſent; exempla ſunt, & antiqua in Conone ſupra laudato, quem inter ingenioſiſſima inventa ſua, Geometris abſque demonſtratione propoſita, quædam complexum fuiſſe, quæ falſa erant, teſtis eſt idem Archimedes *loc. citat.* & recentia non deſunt in Mathematicorum lectione verſatis, quæ hìc referre non vacat,& alibi indicata habes *cap.* 12. *n.* 10.

6 Sed eſto veriſſima omnia ſint, quæ à Geometris ſine demonſtratione proponuntur (ut certè indubia ſunt, quæ à Viviano, ab Hugenio, aliiſq; ſummis Viris propoſita habemus, neq; id fas in controverſiam ad-

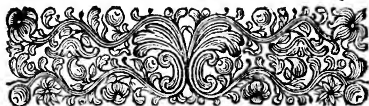
du-

ducere) quamdiù hic subsistunt Geometræ, tamdiù revera *Puri Historici* munus obeunt; quiddam amplius Geometriæ titulis accedere par est, quàm nudam Historiæ laudem: utrumque Geometria munus habet, & vera proponere (quod Historiæ commune est) & eadem demonstrare (qua singulari dote ab Historia discernitur, & summum humanæ Sapientiæ verticem meritò possidet) Historiæ sufficit, si fidem pariat, Geometria, si evidentem prætereà rerum abs se propositarum scientiam Lectorum mentibus non inducit, vix Geometriæ nomen,& speciem servat. Non inutilis igitur operæ fuerit,à maximis ævi nostri Geometris asserta demonstrationibus suis communire,& quod illis, vel temporis, vel opportunitatis defectus invidit, supplere, quemadmodum pro viribus exequi, tum in antecedenti, tum in hoc nostro Opusculo conati sumus; Præsertim cùm ea occasione tam generales Tangentium, Quadraturarũ, ac Dimensionum methodos aperire, Tibique, Mi Lector, explanare licuerit, in quibus quid profecerim, quid aliorum inventis addiderim, Tui ipsius judicio relictum esto. Intereà, si hæc boni feceris, infinitis aliis, quæ adhuc, vel schedulis sparsa, vel ordinatiùs disposita premo, edendis animum dabis.

7 Antequàm tamen ad lectionem accedas, rogandus es, ut pauca quædam præli vitia corrigas, nequid deinceps offendas, quod attentioni tuæ moras injicere possit; non dico leviora quædam,quæ ad orthographiam spectant, ut cùm *pag.* 208 *lin.* 2. comma præfixum

xum est verbo *altitudinis*, cui fuerat subnectendum; sed alia duo majoris momenti, quæ sensum turbare possent, primum *pag.* 42. ubi *lin.* 4. habetur *punctum V*, legendum est enim *punctum I*, & viceversa *lin. seq.* ubi habetur *curvæ in u, I*, legendum *curvæ in u, V*. Alterū *pag.* 162. ubi primo loco *Sturmium* numeratum mallem ante *Guarinum*, contra quàm factum sit. Hoc fortasse nihili faciendum ipse putabis; ego cur magnifaciam, causas habeo satis graves, certè hunc ordinem etiam in Epistola ad P. Cevam *num.* 16. observavi. In Figurarum præthereà Schemmatibus quædam sculptorum vitio, aut deficere, aut perperam efformata esse deprehendes, quorum præcipua suis locis opportunè indicata invenies, pleraque tamen Lectorum Humanitati, ac Benevolentiæ excusanda remisi, nec enim ipse, alias inter sollicitudines, aut omnibus notandis idoneus, aut corrigendis ( prælo jam properante) sufficiens fui: profectò, æquus ipse cùm sis, ea mihi nullatenus imputanda esse intelliges. Vale.





# GUIDONIS GRANDI
## MONACHI CAMALDULENSIS
In Pisana Academia Publ. Philos. Professoris

# GEOMETRICA
# DEMONSTRATIO
## THEOREMATUM HUGENIANORUM
### CIRCA LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM.

## CAPUT I.

*Logisticæ, seu Logarithmicæ descriptio. Ejus primaria proprietas. Logisticæ aliorum graduum. Ejusdem per duos motus generatio. Axem habet pro Asymptoto. Tam supra, quàm infra in infinitum continuari potest. Alio duplici motu describitur. Spiralis Logarithmicæ per duos motus descriptio. Ejus primaria affectio. Ad alios gradus extendi potest. Centro per infinitos cincinnos circumvolvitur, licèt longitudine finita sit. Æquè inclinatur cuilibet radio. Gravia per ipsam de-*

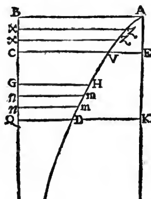


de-

*delata eodem semper momento pollent, respectu momenti, quod haberent in perpendiculo, Cartesio etiam id primùm observante. Per convolutionem primæ Logisticæ gigni potest. Fallax, ex nonnullorum methodo, ratiocinium circa ejus spatii dimensionem.*

1 RECta methodus postulat, ut, antequam ad demonstrandas, quas Hugenius proposuit, Logisticæ proprietates accedamus, illius genesis, & descriptio præmittatur; imò & variis modis idem præstare non inutilis operæ pretium fuerit, inde siquidem non solùm primariæ ejusdem affectiones, ex quibus aliæ pendent, sponte sua profluere intelligentur, verùm etiam ad eorum, quæ deinceps dicenda sunt, intelligentiam haud parùm conducet clara, & distincta ejus naturæ notio per ejusmodi varias generationes Lectorum mentibus faciliùs indita, atque altiùs infixa.

2 Logistica igitur, seu Logarithmica linea illa est, in qua ordinatæ ad æquales axis partes sunt geometricè proportiona-



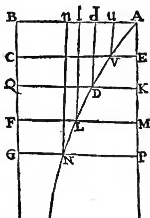

les; nempè diviso axe BQ in quotlibet partes æquales BC, CG, GQ, &c. si ad earumdem terminos ordinatæ BA, CV,

CV, GH, QD, &c. fuerint continuè proportionales, quæ per puncta A, V, H, D, (aliaque extrema z z, m m, mediarum proportionalium æquo semper intervallo duabus quibuslibet ordinatis interponendarum) transit linea, *Logistica*, seu *Logarithmica* appellari consuevit, eò quòd inveniendis logarithmis inserviat, uti ex sequentibus manifestum erit.

3 Ex hac enim definitione constat, partes axis ita correspōdere ordinatis, quemadmodum Logarithmi respondent naturalibus numeris, & quòd ratio quarumlibet duarum ordinatarum, veluti BA ad CV, respectu rationis ordinatarum BA ad QD in eadem proportione erit, in qua axis partes CB, & QB per has ordinatas abscissæ; siquidem, æqualiter crescente axe, perinde æqualiter crescit ordinatarum proportio, unde quàm multiplex est QB ipsius BC, tam multiplex pariter est ratio duarum BA, QD, rationis duarum BA, CV; & generaliter, rationes, quas invicem habent duo quælibet ordinatarum paria (etiamsi una pro communi antecedente, aut consequente non sumatur, sed comparetur verbi gratia ratio duarum BA, CV, cum ratione, quæ est inter duas GH, QD) erunt ad invicem, ut partes axis quolibet ordinatarum pari interceptæ, uti ad ipsam curvæ hujus naturam attendendo, vel sumptis, tum rationum illarum, tum axis partium æquè multiplicibus, facilè constare potest; atque hæc erit primaria Logisticæ proprietas, per quam poterit expressiùs definiri, ejusq; natura clariùs determinari.

4 Ubi obiter animadvertendum erit, posse aliorum etiam graduum Logisticas excogitari, si videlicet rationes ordinatarum BA ad CV, & BA ad QD jam non forent ut partes axis BC, & BQ, sed ut earumdem BC, & BQ quadrata, vel cubi, aliæve potestates, vel etiam radices quadratæ, vel cubicæ, aliorumve graduum, sive in ratione axis partium, ut libuerit multiplicata, vel submultiplicata; adde & sesquialtera, vel sesquitertia, &c. quas quidem Logisticarum species hoc loco minimè considerandas suscipimus; neque verò id aut susceptæ exercitationis institutum postulat, aut temporis etiam ratio permittit, sed de prima, & simplicissima dumtaxat, quam suprà descripsimus, specie erit hìc nobis cum Cl. Hugenio tractandum.

5 Porrò quum proportionalium differentiæ ſint in eadem ratione proportionales, manifeſtum eſt, ipſas A u, u d, d l, l n, &c. interceptas axi parallelis V u, D d, L l, N n æqualiter creſcentibus, fore in continua proportione earumdem ordinatarum; quare hæc linea, uti primus Logarithmorum Inventor Neperus delineare aggreſſus eſt, deſcribi intelligetur duplici motu, altero lineæ A B per B F æquabiliter, ſibique æquidiſtanter deſcendentis, altero puncti A motu continuè retardato versùs B delati, itaut ſpatia æqualibus quibuſcumque temporibus ſubinde tranſacta in eadem geometrica ratione




decreſcant; quomodo quo tempore linea deſcendens confecerit ſpatium B C, & ſitum C E obtinuerit, ſi punctum A venerit in u, jamque in puncto V reperiatur, ſequenti tempore æquali, linea per æqualem axis portionem C Q delapſa, & in Q K poſita, punctum A translatum eſſe in d, ſpatio u d tranſacto, adeòque in ſitu D reperiri concipiendum eſt, ſequenti adhuc tempore, quo linea percurrerit ſpatium Q F, & in F M collocata ſit, punctum ex d in l promotum, atque in ipſo L puncto conſiſtere intelligetur, ſpatiis A u, ud, d l, cæteriſq; deinceps decreſcentibus in ratione B A ad C V; evidens

dens enim eſt motum ex utroque compoſitum fore in eadem curva A V D L N, quam priùs determinavimus.

6 Cæterùm conſtat curvam A V N hac motuum compoſitione deſcriptam axi B F continuò propriorem fieri, prout punctum A versùs B ſemper fluere, & ad ipſum accedere intelligitur, nec tamen evenire poſſe aliquando, ut cum ipſo axe conveniat, uno verbo, axem ipſi Logiſticæ *Aſymptoton* eſſe, quia creſcente in infinitum axe B F per additionem æqualium partium, alia, & alia ſpatia multitudine infinita, ſemperque minora, & minora ipſi puncto A percurrenda remanent, antequam ad ipſum B perveniat, quod ideò numquam attingere poterit: ſeriei ſiquidem infinitæ A u, u d, d l, &c. in ratione A B ad C V, vel B u continuatæ ultimus terminus eſt punctum B, eò quòd, quum ſit A B ad B u, ut A u ad u d, erit etiam A B ad priorum duarum differentiam A u, ut A u ad differentiam duarum poſteriorum A u, u d; quare ex doctrina Progreſſionum Geometricarum, quam poſt Archimedis veſtigia in Libro de dimenſione parabolæ, primus recentiorum Torricellius idem argumentum tractans lemm. 27. & Cavallerius in ejuſdem Scholio apud ipſum demonſtrarunt, mox Gregorius à S. Vincentio, aliique deinceps fuſiùs illuſtrarunt, erit ipſa A B ſumma progreſsionis terminorum A u, u d, d l, &c. in dicta ratione continua decreſcentium; nec vacat id particulariùs demonſtrare, quum vel ex ipſa prima deſcriptione curvæ *num.* 2. adducta ſimpliciùs longè innoteſcat hæc ipſa Logiſticæ affectio, quòd ſcilicet ad axem tanquam aſymptota propiùs accedat, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipſo conveniat; continuatio quippe rationis A B ad C V per minores, ac minores terminos in infinitum fieri poteſt, quin umquam minimus ejuſmodi terminorum reperiatur, aut aliquis omnium ultimus fingi queat.

7 Sed & eadem ratione liquet, Logiſticam D V A in immenſum ſupra ipſam B A continuari poſſe, nec umquam ad certum aliquod curvæ hujus initium, ac veluti verticem, ſupremumque ejus punctorum fontem perveniri, ſed varia dumtaxat ejus ſegmenta per ordinatarum aliquam, veluti A B, vel C V abſciſſa exhiberi, nec magis punctum A, quàm V, vel D,

aut

aut aliud quodvis pro Logisticæ capite statui posse: unde & perinde esse undecumque incipias, ratio enim ordinatarum B A, & C V tam benè ad majores terminos, quàm ad minores continuari potest, & ideò applicatis infinitis ejusmodi terminis successivè majoribus, & supra B A in immensum crescentibus, ad partes ipsius axis F B, ultra B producti, longitudine æquales prioribus B C, C Q &c. itaut per ordinem arithmeticè crescant axis portiones, geometricè crescentibus ordinatis, eadem curva ad superiores partes in immensum continuabitur per applicatas datam quamlibet magnitudinem excedentes, non minùs quàm ad inferiores in infinitum produci queat per applicatas qualibet magnitudine data minores.

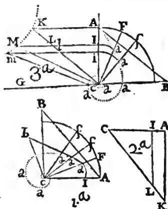
8 Illud etiam intereà animadvertisse juvabit, duplici alio motu eamdem curvam intelligi posse descriptam, si videlicet imaginemur, puncto A per A P æquabiliter descendente, (vel musca, aut formica per hastam A P similiter æquabili motu delata, ut & P. de Chales in logarithmis tradendis supponit) ipsam interim A P, lineæ B A perpendiculariter insistentem, sibi æquidistanter versùs B promoveri, ac subinde in u V, d D, l L, &c. reperiri, spatiis A u, u d, d l, &c. in eadem ratione ge-

geometrica decrescentibus, prout arithmeticè crescunt spatia AE, AK, AM, &c. à puncto æquabiliter descendente percursa; sic enim punctum A subinde reperietur in punctis V, D, L, N, &c. resque eodem recidere observabitur, si ad superiùs dicta *num.* 5. attendamus, unde ulterioris explicationis molestiæ parcendum erit: quemadmodum & ejusdem tædii compendio consulentes missam facere decrevimus (mysterii plenissimam) eorumdem motuum inversam compositionem, qualis haberetur, si axis BF ab ipsa tota æternitate motu infinitè tardo per BA motus intelligeretur, ita tamen accelerato celeritatis gradu, ut integra spatia, quæ in fine æqualis cujuscumque temporis particulæ transacta forent, veluti Bn, Bl, Bd, Bu, BA essent in continua proportione geometrica, puncto aliquo intereà æquabiliter ascendente per eumdem axem BF, itaut post emensum infinito tempore infinitum spatium infra G positum subinde æqualibus tẽporibus ad G F Q C B ascenderet, perque hanc motuum compositionem reperiretur ex ordine in N L D V A; aut si æquabilis motus ab æterno inchoatus refunderetur in lineam GP versùs BA ascendentem, acceleratus verò in punctum G, vel B per eamdem lineam versùs P, vel A promoti, itaut quolibet æquali tempore spatia percurreret geometricè proportionalia majora, ac majora nl, ld, du, uA post emensos similiter motu infinite tardo in tota æternitate singulos minores, ac minores ejusdem progressionis terminos per ordinem acceptos, itaut subinde in iisdem punctis N L D V A reperiatur, &c.

9 Aliud potius Logisticæ, seu Logarithmicæ lineæ genus, de quo infra nonnulla dicenda recurrent, exponere hac occasione non gravabor. Illa ad modum spiralis cujusdam generari intelligitur, radio circuli per circumferentiam æquabiliter moto, dum punctum quoddam ab extremo radii versùs centrum motu in geometrica proportione retardato procurrit, ita ut quidquid præstat axis Logisticæ BF in curva superiùs exposita, id in spirali, de qua loquimur, præstet circuli peripheria in arcus æquales divisa; quod verò præstabant ibi ordinatæ BA, CV, QD, &c. geometricè proportionales, id in præsenti efficiant radii à centro ad hujus spiralis puncta exporrecti.

cti. Itaque in hujus diagrammatis fig. 1. vel 3. exposito quovis circulo C A F f, determinatisque quotlibet æqualibus arcubus A F, F f, f f, ponantur radiorum correspondentium portiones C A, C a, C a geometricè proportionales; erunt puncta A, a, a, in curva *Spirali Logistica*, aliis *Spiralis Logarithmicæ*, quibusdam *Spiralis Geometricæ* nomine appellata, quæ pariter ad infinitos gradus extendi posset, si fingerentur radiorum ejus rationes non tantùm in simplici, sed & in multiplicata, aut submultiplicata qualibet arcuum abscissorum ratione crescere, prorsus ut de prima Logistica dictum est suprà *num.* 4. sed enim in prima hujus spiralis simplicissima specie sistimus, nec aliis pronunc implicamur.

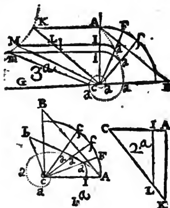
10 Et quidem hìc pariter, si radii C A, C a sint ut numeri, arcus respondentes F A, f A erunt ut Logarithmi, eritq; prima hujus curvæ affectio, quòd ratio duorum quorumlibet radiorum ad rationem duorum quorumlibet aliorum sit, ut nuper indicavimus, in eadem proportione, in qua sunt arcus binis quibuslibet radiis intercepti, prorsus ut de rationibus ordinatarum, deq; partibus axis in prima Logistica acceptis supra dicebatur *n.* 3. Unde & constat Spiralem Logisticam utrinq; pariter in infinitum continuari posse, tum ad majores, tum ad mino-



nores terminos continuata ratione radiorum crescentium, aut decrescentium circa centrum, circa quod per infinitos cincinnos hæc curva convolvetur, prout infinities repetentur arcus æquales, per quos distare debent radii illi proportionales, adeòque integræ circulationes numero infinitæ sibi invicem superponentur, centro intereà respectu curvæ quasi asymptoto sese habente, quippe ad illud magis, magisque accedent curvæ puncta intervallo minore quolibet dato, prout diminuentur proportionaliter radii, nec aliquando tamen in ipsum centrum desinent, quum ad minimum horum terminorum perveniri nõ possit: quæ res, ut patebit, curiosa contemplatione non vacat, (non minùs quàm si motuum, quibus describitur compositionem inversè consideres eo modo, quo in prima Logistica fieri posse indicavimus sub finem *num.* 8.) manifestum est enim, totam, quanta esse possit, hujusmodi curvam per infinitos cincinnos infinitè multiplici gyro se circa centrum convolvẽtem, determinatæ rectæ lineæ longitudinem minimè excedere, longitudinem scilicet suæ tangentis A B usq; ad radio perpendicularem ex centro excitatam productæ; quod & ab aliis pridem observatum video, facilemque habet demonstrationem ex infra dicendis, *cap.* 5. *num.* 10.

11 Sed & illud per se propemodùm constat, atque ex præmissa hujus spiralis genesi sponte profluit, radios ad quodlibet ipsius curvæ punctum æquè inclinari, itaut constans, certus, & determinatus semper sit angulus C a A, quem quilibet radius cum curva ad easdem partes constituit; siquidem hoc spirali spatio in triangula infinitè parva æqualium ad centrum angulorum distributo, veluti se habent A C a, a C a, &c. constat illa similia fore, propter latera circa æquales angulos proportionalia, quapropter & alii anguli homologi æquales erunt; itaque si ponatur, punctum C esse Terræ centrum, in quod gravia collimant, quæratur autem curva (in suppositione perpendicularium, seu linearum directionis, non æquidistantium, ut physicè sumi solent, sed in centrum convergentium, uti revera esse censentur) in qua grave positum, & per quam delapsum, idem in quolibet puncto momentum retineat, respectu momenti, quod habet in perpendiculo, ita ut illud ad hoc

( ubicumque confiderentur ) eamdem semper determinatam rationem obtineat, ea certè non alia esse poterit, quàm Spiralis hæc Logarithmica, cujus inclinatio ad radios a C ( exprimentes veram gravium directionem, veraque perpendicula, in quibus momentum maximum, seu totale exercetur ) num-

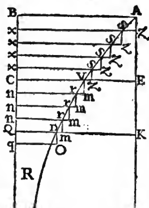


quam immutatur, sed semper eadem perseverat, contra quàm faciat recta quælibet, velut A B, exhibens planum aliquod inclinatum, in quo positum grave ( juxta rigorem geometricum perpendiculorum convergentium ) non idem in quolibet puncto momentum habere potest, nec eadem semper esse hujus momenti ratio ad momentum in perpendiculo [ut ut id re ipsa à Mechanicis sapienter assumatur, quippe in tanta à centro distantia perpendicula quasi parallela habentur, aut rectæ illius portio cum Logisticæ Spiralis portione reipsa coincidit]ob varium inclinationis angulum ubique inconstantem, quem diversa ejusdem rectæ puncta cum centro conjuncta constituunt, unde & momentum ad singula ferè puncta in rigore variari continget.

Post hæc autem scripta inveni & Celeberrimum Cartesium par. 1. Epistolar. ep. 73. Mersenno jam indicasse lineam, in qua momenta non variantur, esse quamdam spiralem, rogatumque ut

ut ejus naturam indicaret, reposuisse epist. sequ. eam talem esse, ut ejus tangentes sint ad radios ubique æqualiter inclinatæ, & curvæ portiones radiis illas abscindentibus esse proportionales; quod re ipsa Logisticæ, seu Geometricæ Spirali convenit, ut monuimus.

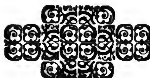
12 Hæc eadem porrò Spiralis Logistica intelligi etiam posset describi per convolutionem primæ Logisticæ, de qua supra loquuti sumus, toto axe B Q in punctum centri contracto,




ipsa verò A K in peripheriam circularem radii B A (repetito, ut opus fuerit, circumvolutionis gyro) curvata, singulisque ejus æqualibus partibus in pares arcus contortis, ordinatis intereà B A, C V, Q D in totidem radios à centro deductos abeuntibus, atque à parallelismo ad convergentiam in idem centrum translatis; uti viceversà primam Logisticam per evolutionem hujus spiralis, rectificata circuli peripheria, & radiis sese explicantibus, atque ad parallelum situm redeuntibus conformari quis concipere posset. Cave autem putes Logisticam in Spiralem contractam spatium continere dimidium ejus, quod explicata complectebatur, eò quòd infinitè parva parallelogramma B z, x z, &c. ex quibus illa evoluta constabat, in totidem abeant triangula parallelogrammorum di-

dimidia, ex quibus Spiralis Logisticæ spatium absolvitur. Ejusmodi enim ratiocinium (ut ut celebrium Geometrarum methodo conforme) plerumque fallax esse deprehenditur, quia non eadem retinetur in convolutione dictorum triangulorum altitudo, quæ priùs fuerat parallelogrammorum, (quamquàm in certa ratione semper varietur) utì nec eadem basis, quæ enim priùs Curva Logistica infinita erat, in Spiralem Logisticam longitudine finitam convertitur; Unde circa Spiralis hujus Logistici Spatii dimensionem ea dumtaxat sunt attendenda, quæ infra *cap.7.n.*13. ex evidentioribus principiis generaliter deducemus. Atque hæc interea, ad ingenerandam Tyronibus Logisticæ lineæ, de qua deinceps agendum erit, notitiam, prælibasse sufficiat.

Nunc quæ sint nobis ad mentem Hugenii demonstranda, allatis Clariss. Auctoris verbis, breviter indicabimus.



CA-

# CAPUT II.

*Logisticæ proprietates ab Hugenio propositæ. Spatiorum, sive ad axem, sive ad ejus parallelam ordinatis interiectorum, tum ad invicem, tum ad infinitum reliquum Logisticæ spatium proportio. Subtangentis longitudo semper eadem, & quæ. Trilineorum Logisticæ proportio. Infinitum Logisticæ spatium, cujus trianguli duplum. Cui rectangulo æqualia reliqua spatia. Solida ex infinito spatio Logisticæ circa axem, vel circa ordinatam revoluto, quam proportionem habeant ad conos inscriptos. Centrum gravitatis Spatii Logistici, in qua ab axe, & ab ordinatis distantia. Prædictorum solidorum gravitatis centra determinantur. Quomodo Logistica hyperbolæ tetragonismo conducat, & quam proportionem habeant hyperbolica spatia ad parallelogrammum quodlibet asymptotis inscriptum.*

IPsis Clarissimi Authoris verbis latinè redditis, Logisticæ proprietates referre placet, prout idem ipse nobis illas propositas voluit ad calcem suæ Diatribæ de *Causa Gravitatis*, ubi sic habet.

*Les proprietez de la Ligne Logistique, que i' ay promis de raporter, & dont quelques unes ont servi à trouver ce que i' ay remarque' touchant les movemens à travers l' air, sont les suivantes; outre la premiere, que i' ay desia indiquèe, de la*

Proprietates Lineæ Logisticæ, quas referre promisimus, & quarum nonnullæ iis investigandis deservierunt, quæ circa gravium motus per aerem superiùs adnotavimus, sequentes sunt; præter jam indicatam, proportionalitatis or-

*proportionalitè des ordonnèes à l' asymptote, quand elles sont egalement distātes, par la quelle ont trouve des points dans cette ligne.*

ordinatarum ad asymptoton, quando æqualiter distāt, cujus beneficio plura hujus lineæ puncta reperiri possunt.

*1 Que les espaces compris entre deux ordonnèes à l'asymptote, sont entre eux comme les differences de ces ordonnèes. Ainsi dans cette figure, ou A V D est la Logistique, B O*

1 Quòd spatia comprehensa inter duas ad asymptoton ordinatas sunt inter se, ut earumdem ordinatarum differentiæ. Sic in præsenti figura, ubi A V D Logistica est, B O

*son Asymptote, & les ordonnèes A B, V C, D Q, dont ces dernieres, estant continuèes rēcontrent A K parallele à l'Asymptote en E, K; les espaces A B C V, A B Q D, sont entre eux, comme les droites E V, K D.*

ejusdem Asymptotos, & ordinatæ A B, V C, D Q, quarū duæ postremæ continuatæ cōveniunt cum A K ipsi Asymptoto parallela in E, K; spatia A B C V, A B Q D sunt inter se, ut rectæ E V, K D.

*2 Que les mesmes choses estant posèes, & A O estant la tangente au point A, la quelle coupe C E, Q K, en I, & G; les espaces A V E, A D K sont entre eux, comme les droites V I, D G.*

2 Quòd iisdem positis, & A O curvam tangente ad punctum A, quæ secet ipsas C E, Q K in I, & G; spatia A V E, A D K inter se sunt, ut rectæ V I, D G.

3 Quod

3 *Que l'espace compris entre deux ordonnées, est à l'espace infini, qui, depuis la moindre de ces ordonnées, s'etend entre la Logistique, & son Asymptote, comme la difference des mesmes ordonnées est à la moindre. Quand ie dis, que l'espace infini à une certaine raison à un espace fini, cela signifie qu'il aproche si près de la grandeur d'un espace donné, qui à cette proportion à l'espace fini, que la difference peut devenir moindre qu'aucun espace donné. Dans la figure precedente l'espace A B Q D est à l'espace infini, qui depuis D Q s'étend entre la courbe, & l'asymptote, comme KD à DQ.*

3 Quòd spatium duabus ordinatis interjectum est ad infinitum spatium, quod post minorem harum ordinatarum exporrigitur inter Logisticã, & ejus Asymptoton, ut differentia earumdem ordinatarũ est ad minorem. Quum porrò dicimus infinitum spatium ad quoddam finitum in quadam ratione esse, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum spatium, quod finito illi spatio in dicta ratione respondeat, ut differentia minor evadere possit qualibet magnitudine data. In præcedenti figura spatium A B Q D est ad infinitum spatium, quod post QD, curvæ, & asymptoto interiicitur, ut KD ad DQ.

4 *Que la soutangente, comme BO dans la mesme figure, est tousiours d'une mesme longueur, à quelque point de la Logistique que la tangente apartiene.*

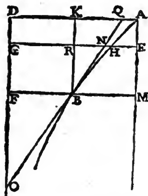
4 Quòd subtangens, velut BO in eadem figura, ejusdem semper est longitudinis, ad quodcumque Logisticæ punctum tangens pertineat.

5 *Que cette longueur se trouve per aproximation, & qu'elle est à la partie de l'asymptote, comprise entre les ordonnées de la raison double, cõme 43429448190325 1804 à 301029995663981195; ou bien pres, comme 13 à 9.*

5 Quod hæc longitudo per aproximationem reperitur, estque ad partem asymptoti interceptam ordinatis duplæ proportionis, ut 43429448190325 1804 ad 301029995663981195, seu proximè, ut 13 ad 9.

6 *Que s'il y a trois ordonnées, comme dans cette figure sont AD, HG, BF, & que du point de la courbe, apartenant*

6 Quòd si fuerint tres ordinatæ, velut in hac figura se habent AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam




*à la moîdre, on mene une parallele à l'asymptote, qui coupe les deux autres ordonnées en R, & K, & une tangente BQ, qui les coupe en N, & Q; les espaces trilignes ABK, HBR sont entre eux, comme les parties des ordonnées entre la courbe, & la tangente, sçavoir comme AQ, HN.*

pertinente ducatur asymptoto parallela, secans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ easdem secans in N, & Q; spatia trilinearia ABK, HBR sunt inter se, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, scilicet ut AQ, HN.

7 *Que l'espace infini entre une ordonnée, la Logistique, & son Asymptote du costé, que ces deux dernieres vont en s'approchant, est double du triangle, que font l'ordonnée, la tangente menée du mesme point que*

7 Quòd spatium infinitum inter ordinatam, Logisticam, & asymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum est trianguli comprehensi ordinata, tangente ad idem ordinatæ punctum, ac subtangen-

gen-

*l'ordonnèe, & la soutangente. Ainsi, dans la mesme figure, l'espace infini, depuis l'ordonnèe B F, est double du triangle B F O.*

8 *Que l'espace, compris entre deux ordonnèes, est ègal au rectangle de la soutangente, & de la difference des mesmes ordonnèes. Ainsi, dans la mesme figure, l'espace A D F B est egal au rectangle de la soutangente F O, & de K A.*

9 *Que le solide que fait l'espace infini depuis une ordonnèe, en tournant autour de l'asymptote, est sesquialtere du Cone, dont la hauteur est egale à la soutangente, & le demidiametre de la base egal à la mesme ordonnèe. Ainsi le solide que fait l'espace infini B F O C, en tournant autour de F O, est sesquialtere du Cone que fait le triangle B F O, en tournant autour de le mesme F O.*

10 *Que le solide produit par le mesme espace infini, en tournant autour de l'ordonnèe B F, depuis laquelle il commence, est sextuple du Cone, que fait le triangle B F O, par sa conversion sur B F. De laquelle mesure des solides il s'ensuit.*

11 *Que le centre de gravitè de l'espace infini, depuis une or-*

gente. Sic in eadem figura spatium infinitum post ordinatam B F duplum est trianguli B F O.

8 Quòd spatium duabus ordinatis interjectum æquale est rectangulo subtangentis in differentiam earumdem ordinatarum; sic in eadem figura spatium A D F B æquatur rectangulo subtangentis F O in K A.

9 Quòd solidum productū ab infinito spatio post aliquam ordinatarum in conversione circa asymptoton, est sesquialterum Coni, cujus altitudo æquetur subtangenti, basis verò semidiameter ordinatæ par fuerit. Ita solidum genitū ab infinito spatio B F O C in conversione circa F O sesquialterum est Coni geniti ex triangulo B F O circa eamdē F O revoluto.

10 Quòd solidū productum ab eodem infinito spatio in conversione circa ordinatam B F, post quam exporrigitur, sextuplum est Coni geniti ex triangulo B F O in conversione circa B F. Ex qua quidem solidorum mensura consequitur.

11 Quòd centrum gravitatis infiniti spatii post unam

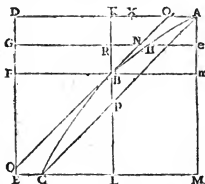
*donnèe, est distant de cette ordonnèe, de la longueur de la soutangente.*

12 *Que ce mesme centre de gravitè est distant de l'asymptote, du quart de l'ordonnèe.*

13 *J'avois aussi trouvè, que le centre de gravitè du premier des dits solides infinis, est distant de sa base, de la moitiè de la soutangente.*

14 *Et que le centre de gravitè de l'autre solide est distant de sa base infinie, d'une huitième de son axe.*

15 *On sçait assez, que cette ligne Logistique sert à la Quadrature de l'Hyperbole, depuis*




*les demonstrations du P. Gregoire de Saint Vincent, touchant les espaces Hyperboliques com-*

ordinatarum, distat ab hac ordinata longitudine subtangentis.

12 Quòd idem gravitatis centrum distat ab asymptoto per quadrantem ordinatæ.

13 Reperimus etiam, quòd centrum gravitatis primi ex dictis solidis infinitis distat à sua basi per semissem subtangentis.

14 Et quòd centrum gravitatis alterius solidi distat ab ejus infinita basi per octantem sui axis.

15 Notum jam est, hanc Logisticam lineam Tetragonismo Hyperbolæ deservire

post demonstrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa Hyperbolica spatia duabus ad al-

te-

*pris entre deux ordonnèes sur une des asymptotes. Et que s'il y a deux tels espaces, dont les ordonnèes de l'un soient comme A D à H G dans la derniere figure, & les ordonnès de l'autre comme B F à C E; ces espaces seront entre eux comme les lignes D G à F E. Mais on n'a point remarque, que je scache, que ces mesmes espaces Hyperboliques sont au Parallelogramme de l'Hyperbole (j'appelle ainsi le parallelogramme dont les costez sont les deux ordonnèes sur les asymptotes, tirèes d'un mesme point de la Section) comme chacune des lignes D G, F E, à la soutangente F O. De sorte que, si le Parallelogramme de l'Hyperbole est supposè de* o, 434294481 9 *parties, chaque espace Hyperbolique, compris entre deux ordonnèes à une des asymptotes, sera à ce parallelogramme, comme le Logarithme de la proportion des mesmes ordonnèes, c'est à dire comme la difference des Logarithmes, des nombres qui expriment la proportion des ordonnèes, au nombre* o, 4342944819; *en prenant des Logarithmes de* 10 *characteres outre la characteristique.*

*Et d'icy il est aisè de verifier la Quadrature de l'Hyperbole*

teram asymptoton ordinatis interjecta; quòdq; si duo fuerint hujusmodi spatia, in quibus ordinatæ unius sint, ut A D ad H G in postrema figura, & ordinatæ alterius, ut B F ad C E, hæc spatia erunt inter se, ut lineæ D G, & F E. Nondum autem, quod sciam, innotuit, hæc ipsa spatia hyperbolica esse ad parallelogrāmum hyperbolæ (sic voco parallelogrammum, cujus latera sint duæ ad utramque asymptoton ordinatæ ex eodē puncto Sectionis ductæ) ut unaquæq; linearum D G, F E est ad subtangentem F O. Adeò ut, si parallelogrammum hyperbolæ suponatur partium o, 4342944819, quodlibet hyperbolicum spatium duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjectum erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet ut differentia Logarithmorū respondentium numeris exprimentibus proportionē ordinatarum, ad numerū o, 4342944819; acceptis Logarithmis decem notarum ultra caracteristicam.

Atque hinc facile est veritatem ostēdere Tetragonismi

*que j'ay donnèes dans le Traitè de l'Evolution des Lignes Courbes, qui est dans mon* Horologium Oscillatorium.

Hyperbolici abs me propositi in tractatu de Evolutione Curvarum, quem *Horologio Oscillatorio* insertum invenies.

Hactenus Viri Clarissimi æquè, ac Doctissimi Theoremata perinde nova, atque admirabilia: nunc ad eadem demonstranda accedamus.

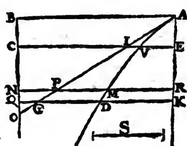


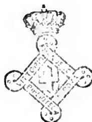
## CAPUT III.

*Primo Theoremate proposito, ostenditur aggregata quotlibet geometricè proportionalium à minimo esse inter se, ut differentiæ terminorum maximi, & minimi. Incommensurabiles magnitudines per ablationẽ quantitatis minoris qualibet data reddi commensurabiles. Hinc primi Theorematis Hugeniani demonstratio more Archimedeo. Spatia Logisticæ æquè alta sunt inter se, ut homologæ ordinatæ, spatia quoque infinitè longa sunt, ut bases. Quodvis spatium ad subsequens infinitum est, ut differentia suarum ordinatarum ad minorem. Hinc secunda ejusdem primi Theorematis demonstratio.*

1 A Primo igitur Theoremate Clarissimi Hugenii auspicantes rem ipsam propiùs attingamus. Illud, ut vidimus, est: *Quòd spatia comprehensa inter duas ad asymptoton ordinatas sunt inter se, ut earundem ordinatarum differentiæ. Sic in præ-*

*præsenti figura, ubi AVD Logistica est, BO ipsius asymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarum duæ postremæ continuatæ conveniunt cum AK ipsi asymptoto parallela in E, K; spatia*



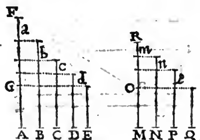



*ABCV, ABQD sunt inter se, ut rectæ EV, KD.* Quod ut demonstremus duo omnino sunt præmittenda primæ demonstrationi, alterum circa aggregata terminorum proportionalium, alterum de lineis incommensurabilibus, quamquàm enim primum ex Torricellii flexilineis, ejusve lemm. 28. de dimensione parabolæ facilè deduci potest, secundum verò expressè à Cavalerio exercit. 6. prop. 24. demonstratum fuerit, malui tamen demonstrationes meas per extensum afferre, ne Lector, libris illis fortè ad manum non occurrentibus, in horum Theorematum demonstratione hæsitare possit, sed solis Euclideis, Conicisve ad summùm elementis instructus, absque alio subsidio, omnia inoffenso pede percurrat; quod & aliàs infra observabimus, semel hìc monuisse sufficiat.

2 Dico igitur primò, quòd, si fuerit duplex series quotcumque terminorum in eadem ratione geometricè proportionalium, erit omnium aggregatum, minimo excepto, in prima serie, ad aggregatum omnium, pariter minimo excepto, in serie secunda, ut differentia maximi à minimo

pri-

primæ ad differentiam maximi à minimo secundæ seriei. Sint enim magnitudines ejusmodi in prima serie A,B,C,D,E, quarum maxima A, minima E, utriusque differentia F G;




differentiæ autem singularum per ordinem à proximè minori sint a, b, c, d, utique simul sumptæ æquales ipsi F G extremarum. Sint pariter secundæ seriei magnitudines M,N,P,Q, quarum maxima M, minima Q, utriusque differentia R O similiter æqualis omnibus simul partialibus differentiis duarum quarumlibet sibi succedentium, quas notant litteræ m,n,p; sintque in eadem ratione continuè proportionales tum quæ in prima serie, tum quæ in secunda reperiuntur. Dico A B C D simul ad M N P simul sumptas esse, ut F G ad R O; cùm enim sint A, B, C, D, E, continuè proportionales, erunt in eadem ratione proportionales earumdem differentiæ a, b, c, d; atque ut una A ad unam a, ita omnes A B C D simul ad totidem a b c d simul sumptas, idest ad ipsam F G iis omnibus æqualem: eadem ratione ostendetur, ut una M ad unam m, ita omnes M N P ad omnes m n p, sive ad R O ipsis æqualem; est autem ut A ad a, ita M ad m, quoniam supponitur esse A ad B, ut M ad N; igitur ut A B C D ad F G, ita M N P ad R O, & alternando ut summa terminorum primæ seriei excepto ultimo ad summam terminorum posterioris ultimo pariter excepto,

pto, ita F G differentia primi ab ultimo in prima ſerie ad R O differentiam primi ab ultimo in ſerie ſecunda. Q. e. d.

3 Dico ſecundò duarum incommenſurabilium magnitudinum majorem poſſe minori commenſurabilem reddi, ablata magnitudine minori qualibet data. Sunto enim in fig. 2. hujus diagrammatis duæ ejuſmodi quantitates incommenſurabiles, A B major, & C minor, quælibet autem magnitudo propoſita A E quantùmvis parva; dico poſſe ex majori A B auferri quantitatem, puta A D, minorem aſſignata A E, itaut reſiduum D B ſit jam ipſi C commenſurabile; nam biſariam

diviſa C, ac rurſus ſubdiviſa qualibet ejus medietate, patet fore ut jam deveniamus ad aliquam ejus partem F minorem data magnitudine A E: multiplicetur itaque F, quouſque fiat proximè major ipſa B E, & aggregatum ex F toties accepta ſit B D, patet B D minorem fore ipſa B A, quia B D ad ſummùm ſuperabit E B quantitate F, juxta conſtructionem, minori quàm ſit A E, aut plerumque nec integra quantitate F, ſed ejus aliqua portione multò magis minori ipſa A E; itaque B D minor eſt, quàm B A, defectu A D minori quàm ſit propoſita magnitudo A E; ſed & eadem B D ipſi C commenſura-

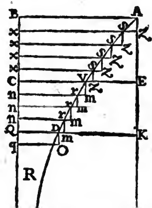
ra-

rabilis eſt, habens cum ipſa menſuram communem F, ex qua pluries repetita conſurgit; igitur ex majori A B duarũ in com-

mẽſurabilium magnitudinum facta eſt ablatio partis A D minoris data quantitate A E, reſidua D B jam commenſurabili ipſi C remanente. Q. e. f.

4 Jam libero pede Hugeniani Theorematis demonſtrationem Archimedeo more ſic inſtituo. *fig ſeq.* Spatiorũ A B C V, A B Q D (quæ demonſtranda ſunt invicem eſſe, ut V E, D K) altitudines B C, B Q vel commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles. Sint primùm commenſurabiles, menſura B x utrique communiter inſerviente, diſtributoque axe B C, & reſiduo C Q in particulas ipſi B x æquales, ac ductis ordinatis, fiant parallelogrãma æquè alta B z, x z,&c. uſque ad C m circumſcripta ſpatio B C V A, quorum ultimum C m illi penitus extrinſecum remanet, continueturque eadem parallelogrammorum æquè altorum ſeries per reliquum ſpatium C V D Q, cui pariter circumſcripta ſint l m, n m, &c. uſque ad Q O, quod toti ſpatio extrinſecum pariter erit: At ſi menſura B x non ſatis ad propoſitum exigua fuerit, poterit illa, & ſequentes portiones ipſi æquales, biſariam dividi, ac rurſus bi-

bifariam, multiplicatis parallelogrammis hæc ſpatia circumſcribentibus, quouſque excedant eadem ſpatia minori exceſſu quolibet dato, ſiquidem ille exceſſus minor ſemper erit primo parallelogrammo Bz, quod (diminuta ejus latitudine) minus eſſe poteſt quavis propoſita quantitate; erunt autem hæc parallelogramma æquè alta, ut baſes, nempe ut ordinatæ in Logiſtica paribus intervallis diſſitæ, adeòq; erunt, ex primaria Logiſticæ affectione *cap.* 1. *num.* 2. relata, in continua proportione, unde ex primo aſſumpto noſtro *num.* 2. hìc probato, aggregatum omnium parallelogrammorum circumſcriptorum ſpatio




ABCV, præter minimum toti ſpatio extrinſecum Cm, ad aggregatum omnium circumſcriptorum ſpatio ADQB, excluſo pariter minimo QO, erit ut differentia Bz à Cm, ſcilicet ut mVE, ad differentiam ejuſdem Bz à QO, ideſt ad ODK, atque adeò ut VE ad DK. Quoniam igitur ſeries parallelogrammorum ejuſmodi ſpatia circumſcribentiũ ſemper, quantacumque fuerit ipſorum multitudo, & quantumcumque accedant ad ipſamet ſpatia, inveniuntur eſſe in ratione conſtanti VE ad DK, patet utique Viris Archimedeis & ipſamet Logiſtica ſpatia iis parallelogrammorum ſeriebus inſcripta, nempe AVCB, & ADQB in eadem eſſe ratione VE ad DK.

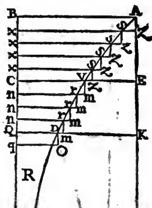
5 Sint jam altitudines B C, B Q incommensurabiles; poterit, ex secundo assumpto nostro *num.* 3. hìc demonstrato, sumi B N deficiens à B Q quantitate N Q minori qualibet data, commensurabilis verò existens ipsi B C; quomodo, ordinata N M R, habebit spatium A V C B ad A M N B eamdem rationem, quam V E ad M R, argumento proximè allato id concludente. Si igitur major esse dicatur ratio A V C B ad A D Q B, quàm ratio linearum V E, & D K, poterit ipsa M R tam proxima esse ipsi D K, & tam parùm ab ipsa deficere, ut ratio dictorum spatiorum sit adhuc major, quàm ratio lineæ V E ad M R, hoc est quàm ratio spatii primi A V C B

ad A M N B, atque adeò foret A D Q B minus quàm A M N B, quod est absurdum; si verò minor esse dicatur ratio dictorum spatiorum, quàm linearum illis, ut supra, respondentium, poterit nihilominus linea N M tam proxima esse ipsi Q D, & spatium A M N B tam parùm deficere ab ipso A D Q B, ut ratio A V C B ad A M N B, hoc est ratio V E ad M R adhuc minor sit, quàm ratio V E ad D K, atque adeò M R major foret ipsa D K, quod pariter est absurdum; Æqualis igitur est ratio A V C B ad A D Q B rationi V E ad D K. Q. e. d.

6. Aliam adhuc expeditionem fortasse ejusdem Theorematis demonstrationem subjungemus, his aliis præmissis, quæ demonstrasse in sequentibus non pigebit: & primò notare juvat duo quælibet spatia Logistica æquè alta, juxta in-

di-

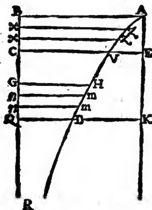
divisibilium methodum, ostendi esse ad invicem, ut sunt Homologæ utriusque ordinatæ; nimirum pari existente altitudine B C, C Q, spatium B A V C ad C V Q D erit, ut B A ad C V, vel C V ad Q D; sumpta enim ubivis B x æquali C n,




& ordinatis x S, n r, erit ex natura curvæ, ut B A ad x S, ita C V ad n r, & alternando, ut B A ad C V, ita x S ad n r; & hoc semper; ergo ut una ad unam, ita omnes ad omnes, nempe ut B A ad C V, ita spatium B A V C ad C V D Q; quod erat, &c. Neque refert sint, ne hæc spatia conjuncta, sibique immediatè succedentia, an prorsùs disjuncta, vel ex parte communicantia, eadem quippe ratio, ut constat, perinde obtinet.

7 Deinde observare oportet, spatia post quamlibet ordinatam in infinitum producta esse ad invicem, ut sunt ipsæ ordinatæ, seu bases talium spatiorū; sic D A B Q R, & D V C Q R, ex parte R utraque interminata, & infinitè longa, sunt ad invicem, ut B A, & C V. Id sanè constat, tum quia infinita B Q R, & infinita C Q R sunt æquales, quum differant finita longitudine B C nullam rationem habente ad ipsarum utramlibet., quare ex dictis numero præcedente spatia iis adjacentia sunt, ut ordinatæ A B, C V; tum etiam exactiùs sic.

Diviso interminato spatio D A B Q R in infinita spatia æquè alta B V, C H, G D, &c. similiter & spatio D V C Q R in infinita ejusdem altitudinis spatia C V H G, G H D Q, &c. erunt utrobique, ex supra demonstratis in *præcedenti numero*,




spatia illa æquè alta, ut suæ ordinatæ, adeòq; in geometrica progressione; omnes igitur termini B V, C H, &c. ad omnes C H, G D, &c. in infinitum continuatos erunt, ut primus terminus B V ad primum C H, ex 12. v. elem. aut ex 29. lemmate Torricellii de dimensione parabolæ aliàs citato; adeòque erunt, ut B A ad C V. Quod e. d.

8 Hinc ultrò profluit tertium Cl. Authoris Theorema, quòd spatium duabus ordinatis interjectum est ad infinitum spatiū, quod post minorem illarū exporrigitur, ut differentia utriusq; ordinatæ ad minorem ipsarum; quia enim D A B Q R ad D V C Q R est, ut B A ad C V, igitur dividendo A V C B ad subsequens interminatum spatium post C V est, ut E V ad V C, & similiter A D Q B ad interminatum spatium post Q D est, ut K D ad D Q.

9 Alia igitur primi hujus Theorematis demonstratio sic instituenda erit; spatium A B C V ad interminatum V D R Q C

est

est, ex *num. praecedenti*, ut EV ad VC; & VDRQC ad interminatum DRQ ex *num.* 7. est, ut VC ad QD; denique DRQ ad DVCQ ex *num. praeced.* & convertendo est, ut QD ad DK; igitur ex aequo AVCB ad CVDQ est, ut VE ad DK. Q. e. &c.

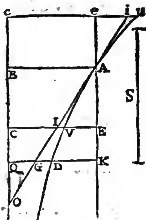


# CAPUT IV.

*Ad secundum Hugenii Theorema demonstrandum, quae sit Logisticae parameter ostenditur, & quomodò aequalis sit subtangenti. Post demonstrationem secundi Theorematis ad quartum proceditur, quo demonstrato, determinatoque rectangulo aequali spatio Logisticae infinitè longo, exponitur Auctoris circumspecta loquutio de ratione infiniti spatii ad finitum, ac familiaribus exemplis suadetur infinitè longa spatia determinatae quantitati aequalia esse posse. Spatia per varia rationis ordinatas in Logistica abscissa quam proportionem habeant; regula ad dignoscendum quando spatia infinitè longa, aut infiniti termini finitam aggregent quantitatem, quando verò infinitam.*

In

1 IN fecundo Theoremate; *Iisdem positis*, inquit Auctor, *& AO curvam tangente ad punctum A, quæ secet ipsas CE,*




*QK in I, & G; spatia AVE, ADK sunt inter se, ut rectæ VI, DG.* Quod pariter ut demonstretur determinanda prius est Logisticæ, ut ipse appellare soleo, *Parameter*; hæc autem ejusmodi est.

2 Exponatur linea S, quæ cum quavis ordinata inter Logisticam, & axi parallelam, veluti cum VE, contineat rectangulum æquale spatio AVCB, adjacenti eidem curvæ ad partes axis; manifestum est, quòd eadem constans linea S continebit cum quavis alia simili ordinata DK rectangulum æquale spatio correspondenti ADQB; cùm enim ex primo Theoremate spatia VABC, DABQ sint, ut rectæ VE, DK, seu, ob communem altitudinem S, ut rectangulum ex S in VE ad aliud ex S in DK, ubi spatium VABC suppositum fuerit æquale rectangulo S in VE, spatium pariter DABQ æquale erit rectangulo ex eadem S in DK; itaque non incommodè linea S, Logisticæ *Parameter* deinceps appellari poterit, eò quòd sit linea, juxta quam ipsæ VE, DK possunt spatia Logisticæ adjacentia AVCB, ADQB.

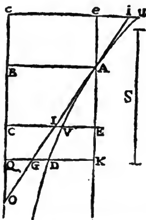
3 Ostendemus autem hanc Parametrum Logisticæ subtangenti, ideſt axis portioni inter ordinatam B A, & tangentem A O interceptæ, ſemper æqualem eſſe, itaut, poſita B O æquali ipſi S, juncta O A curvam tangat in A. Sumpto enim in O A quovis puncto I ſupra, vel infra A, ordinataque C I V, occurrente axi in C, curvæ in V, axi parallelæ A K in E: erit, ob ſimilitudinem triangulorum O B A, I A E, ipſa O B ad B A, ut A E ad E I; rectangulum igitur O B in E I æquale erit rectangulo B A E; ſed ſpatium B A V C eſt, ex *numero prædenti*, æquale rectangulo Parametri, ideſt ipſius O B in V E; ergo rectangulum B A E ad ſpatium B A V C eſt, ut recta I E ad E V; puncto autem i ſupra A exiſtente manifeſtum eſt rectangulum B A c minus eſſe ſpatio B A u c, ergo tunc i e minor eſt, quàm e u; ob oppoſitam rationem, accepto puncto I infra ipſum A, erit rectangulum B A E majus ſpatio B A V C, unde & recta I E major ipſa E V; quare in utroque caſu punctum I eſt extra curvam, & ipſa O A eſt tangens. Quod erat demonſtrandum.

4 Hoc poſito, demonſtratio ſecundi Theorematis Hugeniani ſic inſtituenda erit; cùm, ob ſimilitudinem triangulorũ O A B, G A K, ſit O B ad B A, ut A K ad G K, erit rectangulum ex O B in G K æquale rectangulo B A K Q, ſed O B in D K jam æquatur ſpatio A D Q B, ex ſupradictis; igitur reliquum rectangulum ex O B in D G æquatur reſiduo ſpatio D A K. Similiter oſtendetur, rectangulum ejuſdem O B in V I æquari ſpatio A E V; igitur ut prædicta rectangula, ſive ut eorum baſes D G, V I, ita ſpatia ipſa D A K, V A E; quod erat demonſtrandum.

5 De tertio Hugenii Theoremate, quod eſt; *Spatium duabus ordinatis interjectum eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logiſticam, & ejus Aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum eſt ad minorem; nempe in præcedenti figura ſpatium A B Q D eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logiſticam, & ejus Aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum eſt ad minorem, ideſt in præcedenti figura, ſpatium A B Q D eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt Q D in-*

*inter curvam, & asymptoton interjicitur, ut KD ad DQ;* de hoc, inquam, Theoremate non est quòd simus solliciti, quùm ejus veritas jam innotuerit ex dictis *cap. praced. num.* 8. ut nihil jam addendum supersit, nisi hoc quasi corollarium, scilicet.

6 Quòd spatium infinitum post quamvis Logisticæ ordinatam QD curvæ, & asymptoto interjectum, æquale sit rectangulo subtangentis, seu parametri BO in eamdem ordinatam;




nam, ut DK ad DQ, ita rectangulum ex BO in DK ad rectangulum ex BO in DQ, & ita etiam spatium ADQB ad ad infinitum spatium post QD exporrectum; quare quum rectangulum ex BO in DK sit, ex dictis, æquale spatio ADQB, etiam BO in DQ erit æquale spatio infinito post QD exporrecto.

7 Quæ verò circumspectè ingerit Nobilissimus Auctor illis verbis: *Cùm porrò dicimus infinitum spatium ad quoddam finitum in certa ratione esse, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum spatium, quod finito illi spatio in dicta proportione respondeat, ut differentia minor evadere possit qualibet magnitudine data.* Non ita accipienda sunt, nec eò spectant certissimè, ut scrupulum movere videatur Cl. Author,

num

num exacta æstimanda sit proportio, quam inter utrumq; spatium assignat; ex quo enim Torricellius infinitum solidum hyperbolicum in cylindrum æqualem determinatæ basis, & altitudinis commutare Geometras docuit, necnon infinitorum proportionalium terminorum series in unam summam colligere, jam extra dubium est magnitudinem una, vel altera dimensione infinitam (putà multitudine, licet non mole, si de quantitate discreta sermo sit, longitudine, licet non latitudine, si de spatiis superficialibus loquamur, aut longitudine, licet non crassitie, vel crassitie quidem, sed non longitudine, loquendo de solidis) ita reliquis dimensionibus ad absolutam ejus magnitudinem integrandam concurrentibus limitari posse, ut quantitatem prorsus finitam adæquet.

8 Neque in hoc relictum esse puto Geometris ambigendi locum, ut ut id Tyronibus propè incredibile videatur, qui admirationi, aut potius præjudicatæ, qua tenentur, opinioni paulatim deponendæ assuescent, si has fractionum series $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. in eadẽ ratione dupla decrescentes, aut $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, cæterasque decrescentes in ratione tripla, aliasve cujusvis rationis progressiones in infinitum minoribus, & minoribus terminis coalescentes in unam redigere summam attentaverint; cùmque experti fuerint, non posse tot sumi in prima serie, quæ umquam ad unitatem pertingant, eò quòd, in additione cujuslibet termini ad præcedentes, non additur quod ipsis deficit ad unitatem integrandam, sed semissis dumtaxat talis defectus, putà ad $\frac{1}{2}$ addendo $\frac{1}{4}$ additur semissis ejus, quod primo termino deficiebat ad unitatem, & alter semissis relinquitur, addendo autem duobus præcedentibus $\frac{1}{8}$ non additur quod in prima additione relictum fuerat, nempe quadrans unitatis, sed ejus quadrantis semissis, idest octans, altero octante relicto, qui defectus rursus non suppletur per sequẽtem additionem, quippe non additur octans relictus, sed ejus semissis, nempe $\frac{1}{16}$, atque ita porrò; nec posse tot sumi in serie secunda, quæ umquã unitatis semissem restituant, quia cùm primus terminus $\frac{1}{3}$ de-

ficiat per semissem sui, idest per $\frac{1}{6}$, à semisse unitatis, non resarcit quis illum defectum addendo $\frac{1}{9}$, quippe qui deficiat ab $\frac{1}{6}$ rursus per sui semissem $\frac{1}{18}$, hic verò non suppletur additione sequentis termini $\frac{1}{27}$ deficientis ab illo residuo $\frac{1}{18}$ rursùs per sui semissem, atque ita porrò semper procedendo. ita ut nihilominus ad hos limites, nempe ad unitatem in serie prima, & ad semissem unitatis in serie secunda, semper propiùs accedatur sumptis pluribus, & pluribus terminis ejusdem seriei, defectu semper decrescente infra quamlibet assignatam quantitatem (veluti in figuris plurium, & plurium laterum circulo, aut parabolæ, alterive curvo spatio inscriptis veterum more contingit) donec penitus in seriei fine evanescat: cùm id, inquam, experti fuerint, atque attenta meditatione rei hujus naturam contemplaverint, fateantur necesse erit, quòd si prorsus omnes illi infiniti termini simul acciperentur, præcisè forent in prima serie æquales unitati, in secunda serie unitatis semissi, in aliis alteri quantitati similiter determinandæ.

9 Utì autem in quantitate discreta, ita in continua (quæ semper in discretam dividi, & resolvi potest) idem obtinet; spatium quippe infinitè longum in spatia determinatæ longitudinis multitudine infinita resolvi potest, quæ poterunt semper minora, & minora esse, si latitudo proportionaliter decrescere intelligatur, itaut illa infinita spatia per ordinem correspondeant infinitis terminis alicujus geometricæ progressionis, utì certè correspondent spatia Logistica ad æquales axis portiones abscissa, utì ex dictis *praced. cap. num.* 6. colligitur; omnia ergo hujusmodi æquè alta spatia per infinitam Logisticæ longitudinem distributa, quum sint quædam series geometrica proportionaliter decrescentium terminorum in ratione, vel dupla, vel tripla, vel alia qualibet, prout extremæ ordinatæ cujuslibet æquè alti spatii in data ratione acceptæ fuerint, determinatæ magnitudini æqualia esse, prout in fractionibus contingit, nil prorsùs repugnat, imò vel ex hoc ipso, quod in fractionibus ostendimus, evidentissimè ita debere contingere demonstratur; idemque similiter de spatiis aliis infinitè longis,

gis, de quibus passim Geometræ, & nos infra nonnulla dicturi sumus, absque scrupulo pronunciandum, quòd scilicet determinatæ magnitudini æqualia sint, dummodò tota prorsus accipi intelligantur, nulla ipsorum portione relicta; quod quia conceptu difficillimum est, quum infiniti natura respuat, nedum ut totum integrè designari queat, sed etiam ut imaginatione comprehendi valeat, itaut, post quamlibet partem, non aliam, & aliam ejus extensionem cogitemus, quippe cujus ultimum limitem non concipimus; ideò prudens Auctor cautè addidit: Spatia illa, non tam absolutè infinita, quàm juxta illam dimensionem interminata, ad datam cum spatio finito proportionem tam propè accedere, ut distare possint defectu minori quolibet dato, quàmdiu scilicet illud spatium indeterminatè sumitur, ut longiùs, ac longiùs protensum, nec totum semel integrè accipi intelligitur, aut saltem accipi fingitur.

10 Mirum autem nemini videatur, quòd idem spatium Logisticæ infinitè longum in spatia cujuslibet progressionis, nempe terminorum in ratione dupla, tripla, quadrupla, sesquialtera &c. decrescentium in infinitum distribui possit, pro varia portionum axis altitudine, quum tamen progressiones diversarum rationum non ejusdem sint valoris, sed progressio dupla æqualis unitati, tripla semissi unitatis, quadrupla trienti, &c. non enim eadem est quantitas, quæ locum unitatis obtinet diviso Logisticæ spatio in terminos rationis duplæ, ac quæ eamdem unitatem repræsentat, cùm dividitur in terminos rationis triplæ, aut quadruplæ; siquidem in primo casu unitas est duplum primi spatii, in secundo triplum spatii primi, in tertio quadruplum, &c. quæ sunt quantitates longè diversissimæ; intereà hinc habetur, eamdem magnitudinem esse duplam spatii, cujus ordinatæ sint in ratione dupla, dimidiam tripli, hoc est sesquialteram, spatii, cujus ordinatæ sint in ratione tripla, trientem quadrupli, hoc est sesquitertiam spatii, cujus ordinatæ sint in ratione quadrupla, atque ita deinceps, eadem existente omnium horum spatiorum majori ordinata, singulis pro communi rationis antecedente inserviente; adeòque si totum Logisticæ infinitum spatium ponatur esse partium 12. spatium primū, cujus ordinatæ sint in ratione dupla, erit partium 6, & cujus or-

ordinatæ in ratione tripla, partium 8, & cujus in ratione quadrupla, partium 9, ac similiter de aliarum rationum spatiis ratiocinari licebit; id quod tamen ex primo etiam Auctoris Theoremate facilè deduci potest.

11 Nescio autem, an obiter, dum ferrum candet, exponere generalem regulam juvet, qua dignosci possit, quando spatia infinitè longa, vel termini multitudine infiniti, etiam cùm decrescunt, quantitatem absolutè infinitam adæquent, & quãdo prorsus finitam, ac terminatam. Eam certè ante plures annos, quum Theologicis studiis adolescentes nostros imbuerẽ, in quadã Appendice ad Tractatum de Visione Dei, talem proferebam. Quoniam, ut innui in notatione Præfationis Vivianeorum Problematum *pag.* 27. duarum quantitatum ratio componitur ex rationibus singularum dimensionum illis quantitatibus competentium, & invicem comparatarum, expendendum est, num ratio ex his composita sit ratio finita, nec ne. Jam, aggregatum plurium terminorum, quatenus quædam discreta quantitas est, unam tamen continuam magnitudinem, & quantitatem integrans, duas habet dimensiones, quippe ex duplici capite quantitas ex hisce terminis aggregata crescere, & major fieri potest, nimirum ex terminorum *multitudine*, & ex propria singulorum *quantitate*; quò plures enim termini adunantur, eò major, cæteris paribus, quantitas consurgit, putà quò plures fractiones in unam summam colliguntur, eò major summa conficitur; & stante aliàs pari terminorum multitudine, quò *majores* in se ipsis singuli fuerint, eò pariter major magnitudo colligitur; sic tres fractiones decimales majorem summam conficiunt, quàm tres millesimæ, aut centesimæ; ut ergo videamus, num propositis quibuslibet infinitis terminis, ij quantitatem infinitam aggregent, an tantùm finitam, observandum est, an crescente arithmeticè in infinitum ipsorũ multitudine, decrescat pari ratione, aut majori, vel minori ipsorum quantitas; si in eadem ratione decrescat, ut in 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, &c. ubi secundus terminus est semissis primi, tertius triens ejusdem, quartus ejus quadrans, &c. prout multitudo duorum est dupla unius, triũ est tripla, quatuor quadrupla, &c.

pro-

procul dubio quantitas omnium simul infinita erit, quia cùm terminorum multitudo sic æquipolleat ipsorum abbreviationi, seu parvitati, ratio quantitatis talium terminorum ad aliã assignabilem quantitatem, putà ad unitatem, utpotè composita ex ratione multitudinis, & parvitatis eorumdem terminorũ respectu dictæ unitatis (altera ratione alteram elidente) erit ratio infinita, & ipsorum terminorum quantitas æquipollebit quantitati infinitorum terminorum invicem æqualium, quæ certissimè infinita est. At si in majori ratione termini decrescant, ut accidit in seriebus numero 8 adductis, quæ geometricè decrescunt, crescente terminorum multitudine arithmeticè (atque in aliis benè multis, quæ etsi non geometricè, omnibus tamen compensatis in majori ratione decrescunt, quàm crescat ipsarum multitudo) tunc præpollente parvitate singulorum terminorum eorumdem multitudinis incremento, prodibit ex utriusque compositione finita ratio, & aggregabitur quantitas prorsus finita; quando autem in minori ratione decrescant termini, quàm illorum pluralitas augeatur, ratio plusquàm infinita exinde consurget, seu à fortiori, quàm in primo casu, dicendum erit, omnium aggregatum quantitatis esse simpliciter, ut ajunt, infinitæ, præpollente multitudinis incremento ipsorum abbreviationi terminorum.

12 Idem applica superficiebus, aut solidis, quorum una, aut altera dimensio infinita sit, altera tamen, aut reliquis continuè diminutis; prout enim in majori, aut eadem, minorive ratione minuetur altera dimensio, quàm crescat ea, quæ in infinitum extenditur, judicandum erit spatium illud præcisè finitum esse, aut infinitum, vel plusquàm (si dicere liceat) infinitum Hinc Cl. VVallisius in Arithmetica Infinitorũ optimè observat, spatium hyperbolæ, & asymptoto interjectum, cujus latitudo in eadem ratione minuitur, in qua longitudo asymptoti crescit (propter latera parallelogrammorum æqualium ejusmodi spatio inscriptorum necessariò reciproca) esse idcircò infinitæ prorsùs magnitudinis, in hyperbolis autem aliorũ graduum, ex una quidem parte finitum esse, ubi in majori ratione decrescunt lineæ ad asymptoton ordinatæ, atque adeò la-

latitudo ejuſdem ſpatii, ex altera autem parte, ideſt ad aliam aſymptoton, pluſquàm infinitum exiſtimandum, eò quòd in minori ratione ordinatæ decreſcant; id quod in aliis etiam ſpatiis, tum ſolidis, tum ſuperficialibus obſervari poteſt.



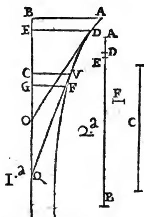
## CAPUT V.

*Quartum Hugenii Theorema, pridem demonſtratum, nova demonſtratione per diverſam methodum ſtabilitur; Tractoriæ proprietas hinc deducta, quòd ordinatæ ad æquales curvæ partes ſint invicem proportionales. Cuilibet curvæ tangentem ducere. Velocitates in diverſis curvæ punctis ſunt, ut facta ex ordinatis in ſubtangentes alternè ſumptas. In Hyperbola ſunt, ut quadrata temporum contrariè ſumptorum. Determinatio tangentium ad infinitas parabolas. Eadẽ expeditior. In aliis curvis quomodò tentanda. Variarum ad id conſtructionum demonſtratio. Subtangens curvarum, quæ ad modum Spiralium deſcribuntur. Infinitæ Spiralium ſpecies quas ſubtangentes habeant, & quomodò infinitis parabolis reſpondeant. Tangens Spiralis Geometricę, & quarumvis figurarum per alterius convolutionem genitarum. Tangens Conchoidis Nicomedeę, aliis infinitis Conchoidibus, & Subconchoidibus applicabili methodo oſtenſa. Eadem geometrica demonſtratione confirmata. Tertia demonſtratio quarti Theorematis Hugeniani. Curva parabolica Logiſticæ ſemper perpendicularis.*

1 Quar-

1 QUartum Auctoris Theorema; *Quòd subtangens, ut BO in eadem figura, ejusdem semper est longitudinis, ad quodvis Logisticæ punctum tangens pertineat*, alia demonstratione non indiget, quum probatum fuerit *cap.* 4. *num.* 3. subtangentem æqualem semper esse Parametro hujus curvæ, quæ linea quædam constans, & definita est; verùm ad pleniorem sciētiam id aliter, atque aliter demonstrabimus, diversa methodo, eaque ad alias longè veritates applicabili.

2 Secunda igitur hujus Theorematis demōstratio sic institui poterit. Sint *fig.* 1. hujus diagrammatis quælibet ad axem Logisticæ ordinatæ A B, V C, tangentes ad eadem puncta A O,




V Q. Dico interceptas ordinatis, & tangentibus B O, C Q (quæ subtangentes appellantur) æquales esse. Sumatur quantumvis parva B E, illique æqualis C G, ut ordinatis E D, G F portio tangentis A D ferè cum curva A D, & portio tangentis V F ferè cum curva V F coincidere censeri possit, ob infinitè parvum intervallum utrivis ordinatarum pari interjectū: erit igitur ex natura curvæ, in qua sunt puncta D, F, ipsa A B ad E D, ut C V ad G F, juxta primariam Logisticæ affectionem; rursus cùm puncta D, F supponantur & in tangentibus

esse,

esse, erit AB quidem ad ED, ut BO ad OE; CV verò ad GF, ut CQ ad QG; ergo eadem erit ratio BO ad OE, que CQ ad QG, & per conversionem rationis eadem ratio BO ad BE, quæ QC ad CG; suntq; consequentia æqualia; igitur & antecedentia BO, CQ æqualia erunt. Q. e. d.

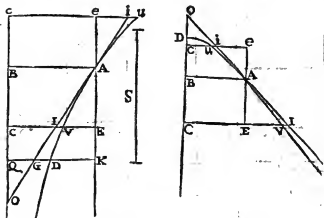
Poterat rigorosiùs argui per deductionem ad absurdum, sed quorsùm ita? Observa potius quid evenisset, si natura curvæ ea foret, ut sumptis non in axe, sed in ipsa curva æqualibus portionibus AD, VF, eadē ordinatæ proportionales essent;

An non enim eodem argumento constaret, OA ad AD esse, ut QV ad VF: unde consequentibus æqualibus existentibus, etiam antecedentia, scilicet, tangentes ipsas AO, VQ ubilibet æquales futuras, adeòque ejusmodi curvam illam ipsam fore, quam *Tractoriam* vocant? eam scilicet, quam describeret grave A funi AO alligatum, dum funis extremum O per rectam OQ trahitur in eodem horizontali plano; pondus siquidem perfectè sequetur ejusdem funis directionem, adeòque ejus viæ tangens erit perpetuò eadem funis longitudo: quamquàm hoc generale est, ut cùm relatio ordinatarum ad axem mutatur in relationem ordinatarum ad curvam, eadem

ex-

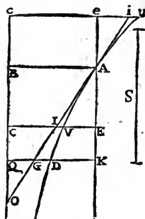
expressio subtangentis transeat ad ipsam tangentem, ut pluribus exemplis confirmare in promptu esset.

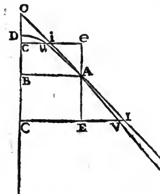
3 Utilius erit Tertiæ demonstrationi ejusdem Theorematis viam sternere generali quodam lemmate circa tangentium inventionem præmisso, quod ex Torricellii doctrina obiter indicata in l. 1. de mot. gr. prop. 18. ejusque Scholio, in hunc modum deduxi; sicque universaliter proponere statui. Ad datum cujuslibet curvæ punctum tangentem ducere. Datum




sit punctum A curvæ cujuslibet DAV, cujus axis BC, ordinata ex dato puncto AB: concipiatur hæc curva descripta motu ordinatæ BA per axem BC æquabiliter fluentis, sibique æquidistanter delatæ,& ex motu puncti A versùs B accedentis, vel ab eodem in ipsa linea recedentis, non jam æquabiliter (sic enim recta linea, non curva describeretur) sed velocitate accelerata, aut retardata, prout opus ad eam curvam generandam. (quælibet certè curva hoc modo genita intelligi potest) Fiat igitur, ut velocitas, quam punctum fluens habet in situ A ad velocitatem ordinatæ æquabiliter delatæ, ita ipsa ordinata AB ad portionem axis BO, acceptam versùs eas partes, ad quas motus acceleratur, si curvæ cavitas axem respiciat, ad

quas verò retardatur si curva axi convexitatem obvertat. Dico junctam O A esse tangentem. Sumatur enim in ipsa O A, ad partes accelerationis punctum i, ad partes verò retardationis punctum V, ordineturque c u i, C V I occurrens axi in c, C, curvæ in u, I, axi parallelæ A E per A ductæ in e, E. Quoniam velocitas puncti A per A B fluentis ad velocitatem lineæ A B per axem delatæ est, ut A B ad B O, seu I E ad E A, aut i e ad e A, manifestum est, quòd si motus puncti A non



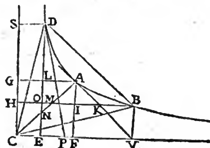




acceleraretur, aut retardaretur, fieret per ipsam A I, seu A i, ita ut quo tempore ordinata descenderet, aut ascenderet per B C, seu A E, aut B c, seu A e, punctum A percurreret partem E I, seu e i, repireturque in I, vel i. Verùm quoniam motus puncti A curvam describentis intereà acceleratur versùs u, & versùs contrariam partem V retardatur, ita ut velocitas ipsius A in A major sit, quàm in V, quia versùs eas partes remittitur, minor autem, quàm in u, quum versùs eas partes invalescat; ideò quo tempore ordinata venerit in C E, punctum A curvam generans minorem ordinatæ portionem E V confecerit, quàm confecisset si pristinam velocitatem retinuisset; minor est igitur E V, quàm E I; cùm verò ordi-

nata

nata venerit in c e, punctum A curvam generans majorem ejusdem ordinatæ tractum e u pertransierit, quàm si pristinæ velocitati nullos accelerationis gradus addidisset; major est igitur e u, quàm e i; & ideò puncta I, i sunt utrobique ultra, & extra curvam, quare ipsa O A tangit. Quod erat demonstrandum.

Observare hinc juvat, velocitates puncti non æquabiliter fluentis, veluti in figura D A B ad axem C V comparata, in




punctis D, A, esse ad invicem, ut facta ex ordinatis in subtangentes alternatim sumptas, putà, existentibus tangentibus D P, A V, ordinatisque D E, A F, ut factum ex D E in F V ad factum ex A F in E P; nam velocitas puncti fluentis in D ad similem velocitatem in A rationem compositam habet ex velocitate talis puncti in D ad æquabilem velocitatem lineæ descendentis, & ex hac ipsa velocitate ad velocitatem puncti ejusdem in A; sed prima ratio, ex hoc Theoremate, eadem est, quæ D E ad E P, secunda verò eadem, quæ V F ad F A; igitur ratio velocitatis puncti fluentis in D ad velocitatem ejusdem in A componitur ex D E ad E P, & ex V F ad F A, idest eadem est, quæ facti ex D E in F V ad factum ex A F in E P.

Unde adhuc colligitur, in Hyperbola Apolloniana D A B, cujus asymptoti S C, C V, velocitates puncti fluentis in quibuslibet punctis D, A esse in duplicata ratione temporum

contrariè ſumptorum; ſpatia enim æquabili motu lineæ per axem C V delatæ tranſacta, velut C E, C F ſunt, ut tempora; ſubtangentes autem E P, F V ſunt ipſis E C, F C diſtantiis à centro æquales; ergo eædem ſubtangentes pariter ſunt, ut E C, F C, ſeu ut F A, E D; ratio igitur facti ex D E in F V, & ex A F in E P erit eadem, quæ facti ex D E in F C, & ex A F in E C ideſt compoſita ex D E ad A F, & ex F C ad C E, quæ eadem eſt priori, unde cum illa componit duplicatam rationem F C ad C E, quæ proinde duplicata erit temporum contrariè ſumptorum, ſicut & homologarum ordinatarum D E, A F; & hoc erat demonſtrandum.

4 Hinc tangentes omnium in primis parabolarum determinationem accipiunt; quemadmodum *fig. ſeq.* ſi C a A fuerit parabola quadratica, quæ æquabili motu ipſius C N per C φ ſibi æquidiſtanter delatæ, ac deſcenſu naturaliter accelerato, ideſt ſingulis æqualibus temporibus novum ſibi celeritatis augmentum ſuperaddente, puncti C versùs N per lineam fluentem demiſſo deſcribitur, contingit, ordinata ex foco n ipſa n a, celeritatem puncti deſcendentis in quolibet curvæ puncto A ad æquabilem celeritatem ipſius lineæ delatæ ſemper eſſe, ut ordinata ex dicto puncto A N ad prædictam ordinatam ex foco n a, juxta citatam prop. Torricellii; eò quòd, cùm velocitates deſcenſuum creſcant, ut tempora, atque adeò ut ſpatia motus æquabilis, ideſt ut φ C, f C, ſeu A N, a n, quas linea

N C

N C æquabiliter transilit; si velocitas descensus in A sit ut A N, velocitas in a erit ut a n; velocitas autem descensus in a est

æqualis velocitati motus æquabilis, quia ordinata ex foco a n dupla est abscissæ c n, eadem verò est celeritas, quæ motu in hac ratione accelerato acquiritur descensu per C n, & qua æquabiliter perseverante conficitur duplum spatium n a, igitur si velocitas in A sit A N, velocitas motus æquabilis erit eadem quæ descensus in a, idest erit, ut n a: quemadmodùm igitur hoc in quadratica obtinet; ita in cubica, ubi celeritates descensuum crescunt in duplicata ratione temporum, ideòque sunt, ut quadrata spatiorum motus æquabilis, scilicet A N, a n, comparando descensum in A ad descensum in a (facta priùs a n tripla abscissæ C n, quia hoc accelerationis genere velocitas per C n descendendo acquisita, triplo spatio a n percurrendo par est, si æquabiliter permanere intelligatur, unde similiter velocitas descensus in a æqualis erit velocitati æquabili lineæ) habebitur, velocitatē descensus in quovis puncto A esse ad æquabilem illam lineæ delatæ velocitatem, ut quadratum A N ad constans quadratum a n; simili ratione in parabola quadrato-quadratica erit velocitas descensus in A ad illam æquabilem velocitatem, ut cubus A N ad a n positam quadruplam ipsius n C abscissæ, atque ita deinceps in aliis gradibus, facta ordinata a n tam multiplici abscissæ C n, quàm multiplex est unitatis exponens ordinatarum.

5 Quam-

5 Quamquàm vix operæ pretium fuerit iis velocitatibus comparandis insistere in parabolarum genere, ubi semel constiterit in quonam puncto velocitas æquabilis motus adæquet celeritatem descensivam, invento scilicet semel puncto a, ubi ordinata a n æqualis est subtangenti n b ( quod quidem evenit ubi a n ad n C est, ut exponens gradus parabolæ ad unitatem, scilicet in quadratica, ut 2 ad 1. in cubica, ut 3 ad 1. &c.)

quia enim curvæ parabolicæ simili in singulis suis partibus accelerationis genere describuntur, ita continuè ordinato, ut spatia curvilinea ad circumscriptum parallelogrammum æqualem semper rationem obtineanr, etiam in his eadem semper erit ratio subtangentis b n ad abscissam n C, vel spatii C f ad interceptam à tangente f d; unde cùm notum fuerit a n, seu b n ad n C duplam esse in quadratica, triplam in cubica parabola, &c. etiam B N ad N C in eadem semper ratione esse manifestum erit, quare expeditiùs dabitur tangens ad quodlibet punctum A.

Similiter & in Hyperbolis, quarum pariter uniformis est ubique acceleratio, unde & parallelogrammorum quibuslibet spatiis inscriptorum eadem semper est ad infinitè longa spatia iisdem basibus insistentia proportio, subtangentes ad distantias à centro eamdem perpetuò rationem observabunt. Invento itaque *fig. seq.* in Hyperbola A a C ad asymptoton f D, D b puncto a, ubi subtangens æquatur ordinatæ, idest ubi velo-

ci-

citas motus æquabilis descensivam adæquat (quod quidem evenit, ubi a n ad n D est, ut exponens gradus Hyperbolæ ad unitatem, scilicet in lineari, seu Apolloniana, ut 1. ad 1. in quadratica ut 2 ad 1. in cubica ut 3 ad 1. &c. prorsus ut in Parabolis contingit, simili enim cum illis motu describuntur, sed dumtaxat reciprocè posito, unde evenit subtangentes cadere ad partes oppositas axis origini, idest sub ipsis ordinatis) cùm constiterit subtangentem inventi puncti a, nempè b n esse æqualē in prima, duplam in secunda, triplam in tertia Hyperbola distantiæ à centro n D, notum similiter erit, etiam quamlibet aliam subtangentem B N in eadem esse ratione ad distantiam N D suæ ordinatæ N A ab eodem centro.

*6* Difficilior est aliarum figurarum tractatio, in quibus non usque adeò perspecta occurret ad singula puncta velocitatum in curvæ genesim conspirantium proportio; generaliter tantùm dici posset, velocitates descensivas ad singula curvæ puncta esse ad invicem, ut spatia synchronis quibuscumque temporibus peracta, sive ut differentiæ æquè distantium ordinatarum intervallo infinitè parvo dissitarum, seu (*vide fig. pag. anteced.*) si concipiatur ad axem C f Φ curvæ cujuslibet C a A applicata figura Φ G g C, cujus portiones à vertice abscissæ per ordinatas, veluti g C f, G C Φ sint ad invicem, ut ordinatæ ad priorem curvam f a, Φ A, quò fiet lineas ipsas f g, Φ G, utpotè minimas, & infinitè parvas differentias duorum ex talibus spa-

ſpatiis à vertice abſciſſorum, optimè repræſentare infinitè parvas differentias ordinatarum fa, ΦA, quibus dicta ſpatia proportionantur, adeòque etiam exprimere gradus velocitatum motus deſcenſivi, itaut ſi talis celeritas in a ſit, ut fg, in A futura ſit, ut Φ G; & ſi reperiatur in curva tale punctum a, cujus ordinata af ad abſciſſam fC in eadem ſit ratione, in qua ſpatium fgC ad parallelogrammum illi circumſcriptum fgbC, habebitur in a puncto velocitas deſcenſiva æqualis celeritati tranſverſi motus æquabilis, adeòque hæc velocitas æquabilis optimè exprimetur per fg, cæteris deſcenſivi motus celeritatibus per alias parallelas, ut ſupra, determinatis; & ſi fiat, ut parallelogrammum circumſcriptum cuivis ſpatio CC Φ ad ipſummet ſpatium, ita BN ad NC, aut C Φ ad Φ f, juncta AB, ſeu Af erit tangens; ſimiliter ſi fiat ut rectangulum A Φ G ad ſpatium Φ GC, ita A Φ ad Φ f, aut ſi ad rectam Φ G applicetur ſpatium Φ GC, & faciat latitudinem Φ f, juncta Af tanget, quorum unum, vel alterum juxta variam curvæ naturam, ejuſve geneſim, præſertim ſi ab initio figura CG Φ determinata fuerit (ut ſi quæratur de curva Ca A genita ex tranſverſali æquabili motu lineæ CN per datam C Φ, & deſcenſivo puncti C per totam CN, ita accelerato, ut in quovis puncto a gradus ejus celeritatis proportionetur ordinatæ fg dati trilinei, alteriuſve figuræ CG Φ datæ, & ad datam lineam C Φ applicatæ) aut aliquid cum his connexum facilè innoteſcet, ac tangens expeditè determinabitur.

7 Quorum omnium ratio, quamquàm ſufficienter in demonſtratione *num.* 3. allata contineatur, breviter indicari poterit ſic. Tangens ad aliquod curvæ punctum illa recta eſt, quam deſcripſiſſet, & deſcribere pergeret punctum deſcendens ſi gradum velocitatis, quem in dato curvæ puncto obtinet, æquabiliter retinuiſſet, tranſverſali lineæ motu eodem remanente; ex eo enim, quòd, remota acceleratione, motus puncti A, in *fig. num.* 3. fieret per AI, oſtenſum eſt AI tangentem eſſe; at ſi fiat BN ad NC, ut parallelogrammum BG Φ C ad figuram CG Φ, juncta BA erit via, cui inſiſteret punctum deſcendens, modò gradum celeritatis ſuæ Φ G toto tempore

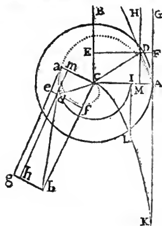
C Φ

C Φ retinuisset (confecisset enim spatium B N, quod ad N C acceleratè percursum foret, ut planum velocitatis æquabilis Φ G B C ad planum acceleratæ Φ G g C, spatium verò transversali motu emensum esset eadem N A) igitur juncta in tali

constructione A B erit tangens; cùmque & C Φ ad Φ f sit in eadem ratione B A ad A f, seu B N ad N C; necnon A Φ ad Φ f rationem habeat compositam ex A Φ ad Φ C, seu rectanguli A Φ G ad C Φ G, & ex ipsa C Φ ad Φ f, quam vidimus esse, ut rectangulum C Φ G ad spatium G C Φ; itemque cùm C Φ ad Φ f sit, ut rectangulum C Φ G ad f Φ G; igitur si fiat C Φ ad Φ f, ut parallelogrāmum circumscriptum spatio Φ G C ad idem spatium, aut A Φ ad Φ f, ut rectangulum A Φ G ad idem spatium, aut applicetur ipsi Φ G dictum spatium, & faciat latitudinem Φ f, semper juncta A f erit tangens; sed quorsum plura? præcipuæ ex his constructionibus, unde cæteræ pendent, geometricam confirmationem (si abstracta hæc motuum consideratio obscurior, aut minùs tuta videatur) habebis infra, *cap.* 13. *num.* 2.

8 Eadem ferè applicari possunt aliis curvis ex circulari, & progressivo motu descriptis, quemadmodùm infinitæ Spiralium species, Conchoides diversorum generum, Cycloides anomalæ P. Cevæ, & aliæ quamplurimæ [imò quid vetet, ubi commodum acciderit, figuram prorsus omnem ejusmodi motibus compositam concipere, electo intra, aut extra ipsam

quovis puncto, velut circularis motus centro, unde protensi ad curvam rami radiorum elongationem, pro vario progressivi motus puncti per ipsos fluentis incremento, exhibeant? illud tamen in his observandum, quòd sicuti *cap.* 1. *num.* 12. ad genesim Spiralis Geometricæ per convolutionem Logisticæ, totus ejus axis in punctum contrahebatur, ordinatis ad æquales axis portiones in totidem ramos æqualibus angulis divaricatos abeuntibus, ita ad rem nostram æquabilis motus lineæ per axem delatæ in circularem circa centrum commutandus est, descensus verò puncti, aut progressus per ordinatas, debet in progressum puncti per curvæ ramos, seu radios figuræ converti; atque ut velocitas progressivi motus ad circularem, ita ipse ramus, seu radius spiralis, alteriusve figuræ præfato modo descriptæ, ad portionem lineæ ex centro perpendiculariter ad eumdem radium insistentis, utpotè parallelæ tangenti arcus per circularem motum descripti, in qua est ipsius directio; hoc insuper animadverso, quòd circularis ille motus æquabilis eodem velocitatis gradu minimè pollet in singulis curvæ pun-

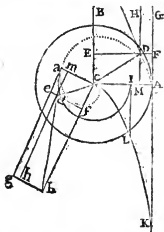



ctis, sed pro varia puncti curvæ à centro distantia variatur, ut per se notum est, quippe non in eadem peripheria A L B verbi

bi gratia ſumitur circularis motus puncti a ſpiralis C a A, in qua ſumitur circulatio puncti A, ille quippe ſumendus in peripheria a l radio C a deſcripta, quem ſolum motum participat ſpiralis in puncto a.

9 Atque inde eſt, quòd ſubtangens quidem puncti A in ſpirali Archimedea poſt integram revolutionem radii C A æqualis eſt peripheriæ A L B A eodem radio deſcriptæ (exiſtente ſiquidem hìc utroque motu æquabili, ipſorum velocitates ſunt, ut ſpatia eodem tempore percurſa, ut ſi velocitas progreſſivi motus ſit C A, velocitas circularis ſit ipſa C B ſubtangens æqualis peripheriæ eodem tempore percurſæ) at verò ſubtangens b c puncti alterius a eadem non erit, ac quæ ad dictam peripheriam ſit, ut C a ad C A, ut æquabilitas motus exigeret, ſed velocitate progreſſivi motus expreſſa per C a, velocitas motus circularis erit tantò adhuc minor, quantò propius centro eſt punctum a, ideſt, ut arcus l d a, quem eò uſque linea C a illo puncto deſcripſit, & cui propterea ſubtangens c b æqualis erit; itaque decreſcunt ſubtangentes in duplicata radiorum ratione, quia ſemel ob diminutionem radii, & ſemel adhuc ob pariformem diminutionem circularis velocitatis, atque adeò vertice C deſcripta parabola A L K, ductiſque A K, l L ejus axi parallelis, erunt hæ ad invicem, ut ſubtangentes radiis helicis C A, & C a (æqualis C l) reſpondentes; quòd ſi Spiralis ejus generis fuerit, ut ſpatia A C, a C motu progreſſivo percurſa ſint in ſubduplicata temporum, aut arcuum circulari motu æquabiliter percurſorum ratione, manifeſtum eſt progreſſivam celeritatem puncti A, vel a ſubduplam fore ejus, quæ fuerat in prima Spirali, & exponendam per ſemiſſem radiorum C A, vel C a, ſi eadem retineatur linea exponens celeritatem æquabilis circulationis, aut ſi illa exponenda ſit per integras lineas C A, C a, æquabilem celeritatem exponendam fore per priorum ſubtangentium duplas; erit igitur in hoc caſu ſubtangens C B dupla circumferentiæ A L D A, & ſubtangens C b dupla arcus a d l, qui ex tribus capitibus minor erit illa circumferentia, nempe in duplicata radiorum ratione, & in earumdem ſimplici adhuc decremento ob approximationem centri, unde parabola cubica C L K deſcripta, in

qua axi parallelæ K A, L I sint in triplicata radiorum A C, C I ratione, sive ut eorumdem cubi, erunt ipsæ axi parallelæ, ut subtangentes ad correlativa curvæ spiralis puncta; similiter in aliis Spiralium speciebus, ac parabolis per ordinem correspōdentibus procedere potes; quod innuisse juvabit ad comparandas Spirales curvas cum congruis curvis parabolicis, uti

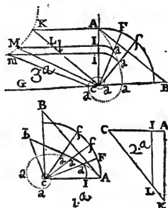



aliàs facturi sumus, ostendendo, quòd si A K sit æqualis $\frac{1}{2}$ circumferentiæ A L D in prima Spirali, aut $\frac{2}{3}$ ejusdem in secunda, aut $\frac{3}{4}$ in tertia, $\frac{4}{5}$ in quarta, &c. prima parabola existente quadratica, secunda cubica, tertia quadratoquadratica, &c. Lineæ, spiralis, & parabolica æquales erunt; Imò et si motus circularis & ipse æquabilis non fuerit, sed acceleratus, congruæ parabolæ nihilominus reperientur earumdem nempe potestatum in axe, & ordinatis, quot fuerint in respondentis Spiralis circumferentia, & radio, sed ordinatis parabolæ ad tantò plures gradus elevatis, quot fuerint unitates in exponente potestatum axis, neque enim difficilior est subtangentium & ad has Spirales determinatio, faciendo semper, ut velocitas

pro-

progressiva ad circularem, ita A C, vel a C ad subtangentem C B, aut C b ex centro perpendiculariter ductam ad suum radium, uti pluribus explicare superfluum est.

10 In Spirali Geometrica, quoniam ex dictis *cap.* 1. *n.* 12. illa per convolutionem Logisticæ describitur ad maximum radium C A posita C B subtangente æquali subtangenti ejusdem




Logisticæ, quæ convolvitur, aliæ subtangentes C b tantò minores prima C B faciendæ sunt, quantò minor est C a ob rationem in fine *num.* 8. indicatam, quia in ipsa evoluta Logistica subtangens cujusvis ordinatæ semper eadem est, ut supra ostendimus, & mox post illustratam hanc methodum ostensuri sumus; atque inde est, quòd triangula C A B, C a b semper similia sunt, angulique à radiis,& tangentibus æquales, totaq; curva A a C æqualis tangenti A B, & a a C tangenti a b, &c. imò universaliter, si curva qualibet convolvi in Spiralem intelligatur eo modo, quo de Logistica citato loco exposuimus, subtangentes radiorum quorumlibet Spiralis erunt tantò minores, quàm forent subtangentes respondentium æqualium ordinatarum evolutæ, quantò propiora centro sunt puncta extrema dictorum radiorum, quàm punctum extremum maximi radii, quo vides nedum Helicis Archimedeæ, aliarumque di-

diverſorum graduum, per convolutiones, trianguli, parabolæque, quadraticæ, cubicæ, &c. genitarum, tangentes determinari cohærẽter ad dicta numero ſuperiori, ſed infinitarum propè aliarum Spiralium, quæ ex quavis figura ſic convoluta oriri poſſunt.

11 Non rarò autem juvabit duorum in eodem radio punctorum motum invicem comparare, quorum alter cognitus ſit, alter certam ad illum proportionem obtineat: exemplo res clarior fiet. Eſto Nicomedea Conchois A a B, polo P, regula F H deſcripta, intervallo A F, cui æqualis ſupponatur G P radius circuli G g M, & quæratur tangens puncti B; juncto ramo P B ſecante prædictum circulum in M, regulam in D, conſidero curvam A a B genitam ex circulari motu lineæ P A circa P, & ex progreſſivo puncti A per ipſam P A ita aſcendentis, ut non obſtante ejus inclinatione ad regulam F H, ipſum punctum eamdem ſemper à regula diſtantiam obſervet, ſit nempe F A ſemper æqualis D B; progreſſus igitur puncti A venientis in B, nempe exceſſus P B ſupra P A idem erit, ac exceſſus P D ſupra P F; eadem igitur velocitas erit hujus progreſſivi motus, atque illa quam haberet punctum F, ſi in circulatione lineæ P F ita per ipſam aſcenderet, ut ſemper reperiretur in regula F H, eamque re ipſa deſcriberet. Velocitas autem circularis in deſcriptione Conchoidis erit ad punctum B tantò major, quàm circularis velocitas in deſcriptione rectæ F H ad punctum D, quantò major eſt B P, quàm P D. Ducta igitur tangente circuli S M O, atque huic parallelis D I,

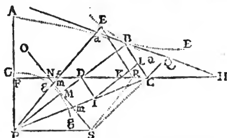
B C,

BC, junctaque PIC, ducatur ramo PB parallela IK, occurrens regulæ in K, atq; eidem parallela CQ æqualis ipsi IK. Juncta QB erit tangens quæsita; motus siquidem per DK componitur ex motu per DI parallelam tangenti MS, quæ circularis motus directionem exhibet, & ex motu per IK parallelam PD, in qua est motus progressivus; sed & motus per A a B componitur ex eodem progressivo, qualem exhibet linea CQ æqualis,& parallela ipsi IK,& ex circulari in eadem directione, sed tantò majori,quantò longior est BP,quàm DP, adeòque optimè exprimendum per BC, quæ ad DI in eadem ratione respondet; igitur juncta QB dabit directionem motus ex utroque compositi; idest tangentem ad punctum B. Simili modo etiam Subconchoidis (sic voco curvam, ad quam sunt puncta abscindentia ex ramis PF, PD infra regulam æqualia intervalla) aliarumque specierum in infinitum curvarum Conchilium, & Subconchilium, cùm scilicet abscissa ex ramis, vel supra, vel infra regulam intervalla, non quidem radiis PM quadrantis circularis æqualia sunt, sed subtensis, seu ramis PM, Pg alterius cujuslibet figuræ GMg (quomodo si hæc sit semicirculus circa diammetrum PF, habebitur infra regulam Cissois Dioclea in infinitum continuata, quam propterea ad genus Subconchilium revoco) tangentes expeditè dabuntur, quas etiam geometricis demonstrationibus cōfirmare, & generali quadam constructione exprimere in promptu esset, nisi verendum foret, ne longiùs ab instituto digrederer; itaque solam primariæ Conchoidis geometricam demonstrationem, ex qua Lector, si acuto pollet ingenio, facilè sibi cæteras cōparabit,in medium afferam,quæ quidē est hujusmodi.

12 Supponatur BC concurrere cum regula in C (potest enim tum BC, tum DI cujuslibet longitudinis esse, dummodò intra ramum PB, & junctam PC contineantur) ducto autem quovis alio ramo Pa, secante regulam in f, ponatur fE æqualis,non quidem radio Pg, sed Pm secanti anguli MPg, & sic ubique fiat, ut habeatur curva EBE, quam manifestum est tangere Conchoidem in B, quia, cùm Pm semper major sit radio Pg, etiam fE major erit intervallo Conchoidis fa,

pun-

puncta igitur E semper sunt supra puncta a Conchoidis; ut igitur observat verus Geometra in Recreatione Geometrica, quæ linea recta tanget curvam E B E, eadem tanget Conchoidem a B a, propter angulum contingentiæ semper indivisibilem, minoremque [ut dici solet] quovis angulo rectilineo;




jam verò ostendemus curvam E B E esse hyperbolam intra asymptotos H N O, ejusque tangentem esse ipsam B Q convenientem cum regula in H; quia ducta P S regulæ parallela, occurrente tangenti M S in S, ob triangula similia D B C, P M S, quorum latera B D, P M sunt æqualia, æquales etiam erunt bases D C, P S, unde juncta S C æquidistabit ipsi D M; quare C N ad N S erit, ut D N ad N M, seu ut P S ad S M, vel C B, adeòque rectangulum N C B æquale erit ipsi N S P; eodem modo ducta E R ipsi B C parallela ostendetur juncta S R æquidistare ipsi m f, adeòque N R E æquale esse eidem N S P; æqualia igitur cùm sint rectangula N C B, N R E curva E B E erit hyperbola intra angulum H N O; cùmque sit N C ad C D, ut M B, seu P D illi æqualis ad B D, idest (extensa I K ad B C in L) ut B L ad L C, seu I K ad K L, nempe C Q [æqualis ex constructione ipsi I K] ad excessum D B supra C Q, aut denique ut C H ad eamdem C D, erit N C ipsi C H æqualis; ergo H Q B hyperbolam in B tangit, & consequenter Conchoidem: quod nobis propositum erat demonstrare.

13 Jam tandem, ut promissam Theorematis IV. Hugeniani demonstrationem ex ea, quam proposuimus, methodo ab-

abſolvamus; ſi in Logiſtica fiat, ut velocitas puncti A illam deſcribentis, juxta geneſim *cap.* 1. *num.* 5. indicatam, ad æquabilem velocitatem lineæ A B per axem delatæ, ita A B ad B O, conſtat ex dictis *num.* 3. atque hactenus abundè illuſtratis, junctam A O eſſe tangentem; ſimiliter ſi fiat, ut eadem æquabilis velocitas ad velocitatem puncti fluentis in V, ita Q C ad C V, juncta V Q tanget; habebit igitur velocitas in A ad velocitatem in V rationem compoſitam ex A B ad B O, & ex C Q ad C V, ſive erit, ut A B in C Q ad B O in C V; ſed eædem velocitates ex dictis tum *cap.* 1. *num.* 3. tum indicatis hìc *n.* 6. ſunt etiam ut B A ad C V, omnes quippe ordinatarum æquo intervallo diſtantium differentiæ ſunt ipſis totis ordinatis proportionales, igitur A B in C Q ad B O in C V eſt ut A B ad C V, quare ſubtangentes B O, C Q ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.

14 Hinc obiter colligere poſſumus, quòd ſi parabola, cujus parameter dupla fuerit parametri Logiſticæ, circa eumdem axem conſtituta fuerit, aut juxta ipſum axem flue-

re concipiatur, in quovis situ alteram altera ad rectos angulos secabit, putà parabola V F, cujus parameter dupla sit subtangentis Logisticæ G Q, & ad communem cum ipsa axem constituta, aut juxta ipsum fluens, utraque se intersecante in

punćto F, aut f, angulus curvarum V F A, aut u f A semper erit rectus; Cùm enim intercepta G Q inter ordinatam, & Q F perpendicularem parabolæ, sit dimidia suæ parametri, demõstrante id Vero Geometra in Clariss. de Max.& Min. Op. erit in hoc casu æqualis subtangenti Logisticæ; ergo Q F tangens Logisticæ, ideſt ipsamet curva A F erit perpendicularis parabolæ V F, & è contra tangens E F parabolæ, seu ipsa curva parabolica V F erit perpendicularis tangenti Logisticæ Q F, seu curvæ A F in punćto quovis sibi occurrant.

CA-

# CAPUT VI.

*Quintum Theorema proponitur, quod ut demonstretur, ostenditur, hyperbolica spatia parallelis asymptoto proportionalibus definita æqualia esse; spatia quælibet eam inter se rationem habere, quam extremarum ordinatarum rationes. Axi Logisticæ parallelæ inter se sunt, ut Hyperbolica spatia iis respondentia. In Geometrica Spirali, arcus, & sectores circulares ejus ramis interjecti, proportionantur spatiis, & sectoribus hyperbolicis respondentibus. Subtangens Logisticæ ad quamvis axi parallelam est, ut parallelogrammum hyperbolæ inscriptum ad spatium hyperbolicum. Demonstrandi modus à scrupulis vindicatur. Propositio universalior redditur. Quid sit facere Universale. Prima Geometricæ Spiralis subtangens est ad arcus circulares, ut hyperbolæ parallelogrammum ad hyperbolica spatia. Spatia hyperbolica, aut sectores hyperbolici in ea sunt ratione ad circulares sectores correspondentes, in qua minima ordinatarum hyperbolę ad semissem subtangentis Logisticæ. Parallelogrammum hyperbolæ inscriptum ad spatium ordinatis duplæ proportionis interjectum est proximè, ut 10. ad 7. Quinti Theorematis Hugenii demonstratio.*

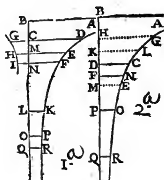
1 LOngiùs in præcedenti capite progressi fuimus, quàm ab initio sperabamus: habenæ ideò contrahendæ in præsenti, in quo Quintum Hugenii Theorema nobis demonstrandum proponimus. *Hæc longitudo*, inquit de subtangente, *per*

*approximationem reperitur, estque ad partem asymptoti interjectam ordinatis proportionis duplæ, ut* 43429448190325 1804 *ad* 30103999566398 1195, *seu proximè, ut* 13 *ad* 9. Quia tamen infiniti penè laboris, ac tedii esset longissimos hos Hugenii numeros persequi, neque ad manum Tabulæ Logarithmicæ ad tam multiplices notas extensæ occurrunt, quibus verisimile est usum Hugenium ad ejusmodi calculum expediendum, ideò eumdem lapidem alia methodo movere aggrediar, majorique tum compendio, tum emolumento, vel ad hanc ipsam, vel ad aliam huic propinquam dictarum linearum proportionem intelligendam Lectorum mentes disponam.

2 Præmittendum igitur, quòd Hyperbolæ, & Asymptoto interjecta spatia, alteri asymptoto parallelis proportionalibus terminata, invicem æqualia sunt; id quidem Gregorius à S. Vincentio Magnus superioris sæculi Geometra, suæque Societatis Lumen Amplissimum, primus, quòd sciam, ostendit, quia tamen nec mihi, nec plerisque fortasse Lectorum meorum, ejus Codex ad manus est, placet demonstrationem hanc cōcinnare. Esto, *fig.* 1. *seq. Schem.* asymptotis A B Q interjecta hyperbola D E R, assignenturq; spatia D C N F, K L Q R definita extremis lineis D C, F N, & K L, Q R alteri asymptoto parallelis, invicem verò proportionalibus. Dico ejusmodi spatia invicem æqualia esse; ex natura siquidem hyperbolæ erunt etiam B C, B N, B L, B Q proportionales, utpotè iisdem parallelis reciprocè respondentes; earumque differentiæ C N, L Q homologis terminis B C, B L, aut L K, C D itidem proportionales. Ordinetur ergo ad C N ipsa C G æqualis L K, & ipsa N I æqualis Q R, atque inter duas C B, B N, sumpta media proportionali B M, ordinetur M E; similiter inter duas B L, B Q sumpta media B O, ordinetur O P, cui æqualis ponatur M H; atque ita porrò sumptis aliis intermediis inter B C, B M, ac B L, B O; inter B M, B N, ac inter B O, B Q ordinatæ ad extrema talium mediarum in spatio K L Q R trāsferantur, & applicentur extremis dictarum mediarum in linea C N existentium, quoadusque fiat spatium C G H I N, cujus ordinatæ sunt æquales ordinatis spatii K L Q R, sed applicatæ ad partes altitudinis C N proportionales partibus alti-

ti-

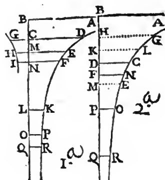
titudinis LQ; nec enim dubium, quin NM ad MC sit, ut QO ad OL, utpotè differentiæ trium continuè proportiona-




lium ejusdē utrobiq; rationis; (existente scilicet NB ad BM, ut BM ad BC, dividendo est NM ad MB, ut MC ad CB, & alternando NM ad MC, ut MB ad CB, aut OB ad LB, idest, eadem ratione, ut QO ad OL) idemq; de aliis intermediis dicendum. Jam sic: spatium DCNF ad KLQR rationem habet compositā ex DCNF ad CGIN, & ex CGIN ad KLQR. Sed prima ratio eadem est, quæ DC ad CG, vel KL (cæteræ enim ordinatæ EM, & MH, seu PO; FN, & NI, seu QR, aliæque intermediæ eamdem perperuò rationē observant) secunda autem ratio eadē est, quæ altitudinis CN ad LQ (per demonstrata prop. 1. append. nostræ Probl. Vivian.) hoc est, ex supra dictis, eadē, quæ ejusdem LK ad CD; igitur ratio spatii DCNF ad KLQR componitur ex DC ad LK, & LK ad ipsam DC, scilicet est ratio æqualitatis. Quod erat demonstrandum.

3 Hinc facillimè deducitur, spatia quævis hyperbolæ, & asymptoto interjecta, lineisque alteri asymptoto parallelis conclusa esse ad invicem, ut sunt rationes extremarum ordinatarum, quibus concluduntur; spatia nimirum CDFN,

OPQR, *fig.* 2. ita comparata sint, ut ratio CD ad NF æqualis non sit rationi OP ad QR, sed in alia quavis proportione, putà altera alterius triplicata, aut duplicata, vel sesquialterata, &c. erit pariter alterum spatium alterius triplum, duplum, aut sesquialterum; sumpto enim rationis CD ad FN

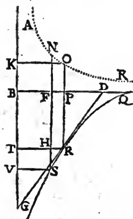



quovis multiplici, putà ratione GH ad NF triplicata ipsius CD ad NF (ideſt ipsis FB, DB, sumptis aliis duabus continuè proportionalibus KB, HB, erectisque ordinatis KL, HG) constat spatium GNFH æquè multiplex fore spatii CDFN (ob singula spatia GK, LD ipsi CF æqualia ex *num. præced.* quippe lineis proportionalibus terminata.) Similiter rationis OP ad QR sumpta quavis multiplici. putà duplicata, EM ad QR (ideſt ipsis QB, PB sumpta tertia proportionali BM, atq; erecta ME) patet spatium ERQM æquè multiplex, scilicet duplum fore spatii OPQR, quandoquidem EP æquabitur ex *num. præced.* ipsi OQ. Quod si ratio GH ad NF æqualis foret rationi EM ad QR, spatium quoque GHFN æquaretur spatio EMQR, si illa major, & hoc majus, si ratio minor, & spatium minus (ut patet, aut apertè deducitur ex *præcedenti*) itaque, ex nota pro-

por-

portionalium definitione Euclidea, erit ratio linearum C D, & N F ad rationem linearum O P, & Q R, ut spatium prioribus cōclusum C D N F ad spatiū posterioribus interjectū O P Q R. Quod erat demonstrandum.

4 Unde apertè colligitur, quòd, si ordinatæ Logisticæ adhæreat præmissa figura hyperbolica linea N O R, atque asymptotis B Q, B A interjecta, quarum illa ordinata, hæc axis

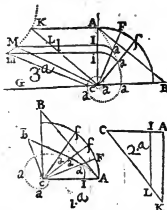



Logisticæ fuerit, producanturque ipsæ N F, O P ad Logisticam in S, R, erit spatium hyperbolicum N R Q F ad spatiū O R Q P, ut axi Logisticæ parallelæ, F S, & P R; cùm enim dicta spatia sint ad invicem, ut rationes inter F N, Q R, & inter O P, Q R intercedentes, ut *num. praced.* ostensum est, sive ut rationes inter Q B & BF, vel V S, & inter Q B, ac B P, seu T R intercedentes, quæ quidem rationes ex dictis *cap.* 1. *num.* 3. sunt, ut portiones axis iisdem ordinatis interceptæ, V B, T B, seu S F, R P, etiam dicta spatia Hyperbolica N F Q R, O P Q R erunt, ut lineæ S F, P R. Quod erat demonstrandum.

☞ *Supple in Diagrammate lineam Q R ipsi N F parallelam, claudentem spatium hyperbolicum.*

5 Si-

5 Simile quidpiam accidit Spirali geometricæ A a a, in qua arcus, aut ſectores per radios ſpiralis abſciſſi, veluti A F, A f, aut A C F, A C f ſunt, *fig.* 3. *b. Schem.* ut hyperbolica ſpatia A I M K, A i m K comprehenſa portionibus A I, & A i aſym-



ptoti A C, quibus differentiæ extremorum ramorum a F, a f ſint æquales [ ſunt enim I A, i a arcus concentrici ipſi A F f] & alteri aſymptoto C G parallelis, curvaque hyperbolica iis intercepta; etenim arcus illi A F, A f, & conſequenter & ſectores A C F, A C f iis reſpondentes, ex dictis *cap.* 1. *nu.* 10. ſunt, ut rationes radiorum Spiralis A C, a C, ſeu A C, & C I, A C, & C i, in qua pariter ſunt dicta ſpatia hyperbolica; cùmque ductis ex centro C rectis C K, C M, C m ( debent enim hæ lineæ in centrum convergere, utut in Schemate, vitio Sculptoris, exorbitent ) ſector M C K ipſi ſpatio K A I M, & ſector m C K ſpatio m i A K ſit æqualis ( ab æqualibus quippe triangulis K C A, M C I ablato communi C L I, additoque utrique reſiduo M L K res eſt perſpicua ) habebimus ſectores hyperbolicos in eadem ratione ſectoribus circuli ordinatim reſpondentes, erit enim M C K ad m C K, vel ad m C M, ut A C F, ad A C f, vel F C f.

6 Col-

6 Colligi intereà ex ſupra dictis poteſt, quòd ſubtangens, ſeu parameter Logiſticæ eſt ad quamvis axi parallelam, ut parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad congruum ſpatium hyperbolicum, ſcilicet ad punctum R Logiſticæ ducta tan-

gente R G, erit G T ad R P, ut parallelogrammum K O P B ad ſpatium O P Q R; ſumatur enim tangentis portio R S infinitè parva, ita ut ducta parallela ordinatæ S V, parallela axi S H N occurrente hyperbolæ in N, tum ipſa tangens R S ferè coincidat cum curva R S; necnon H S, ut terminata ad curvam ferè æqualis ſit eidem, ut terminatæ ad tangentem; ideſt habeat ad ipſam rationem propiorem æqualitati, quàm quælibet data majoris inæqualitatis ratio quantumlibet parva, itum etiam hyperbolicum ſpatium N F P O ferè cum rectangulo O P F coincidat, ſeu illud excedat minori exceſſu quolibet dato: conſtat ex *nu.* 4. & dividendo, fore ſpatium N F P O ad O P Q R; ut H S ad P R, & ſumptis antecedentium æquè proportionalibus, parallelogrammo K P, & linea T G (eſt enim K P ad O P F ferè cum ſpatio P N coincidens, ut B P ad P F, ſeu T R ad R H, vel T G ad H S, prout termina-

tam ad tangentem, quæ ferè coincidit cum terminata ad curvam in S) erit parallelogrammum KP ad spatium OPQR, ut TG ad PR. Quod erat demonstrandum.

Si cui videatur audacior præcedentis demonstrationis processus, simulque infirmior, quàm ut assensum extorqueat, is demonstratione apagogica utatur, per me licet, imò ut huic & similibus applicare discat, specimen hic dabo. Fingat sibi quis minorem esse, si fieri possit, alterutram dictarum rationum, verbi gratia ratio GT ad PR minor esto ratione KP ad spatium OPQR, itaut ipsi adjicienda foret ratio alia majoris inæqualitatis, quæ sit inter *c*, & *d*, ad hoc ut huic alteri rationi æqualis evadat. Cùm itaque ratio PR ad HS (ut



terminatam ad curvam) sit postea eadem, quæ OPQR ad spatium NP, erit rursus ratio TG ad eamdem HS minor quàm ratio KP ad spatium NP, codē defectu rationis *c* ad *d*; potest autem HS terminata ad curvam esse ad HS, ut terminatam ad tangentem in ratione minori, quàm quælibet data ratio *c* ad *d*; si igitur rationi TG ad HS priorem addatur ratio HS prioris ad HS posteriorem, fiet ratio TG ad HS

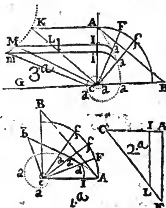
po-

posteriorem, hoc est TR ad RH, vel KP ad rectangulum OPF, adhuc minor, quàm sit ratio ejusdem KP ad spatium NP; quod est impossibile, foret enim rectangulum OPF majus spatio NFPO, cui inscribitur. Si verò dicatur è contra ratio KP ad spatium OQ minor altera ratione TG ad PR, fiet eadem demonstratio, incipiendo ex parte spatiorum, unde concluderetur, quòd HS terminata ad tangentem major foret, quàm HS terminata ad curvam, seu quòd tangens curvā secaret. Nullus igitur esse potest in ratiocinio nostro scrupulus, nec de fallacia insimulari debet, sed de compendio laudari.

8 Intereà notandum velim, præmissam demonstrationem nō pendere ab ulla sive Hyperbolæ, sive Logisticæ proprietate, sed hinc dumtaxat, quòd spatia hyperbolica proportionalia sint parallelis axi Logisticæ; quæ affectio infinitis curvis invicem comparatis communis esse potest; ut si FQN sit triangulum apicem habens in Q, & FQS trilineum parabolicum; utique axi parallelæ erunt, ut interceptarum FQ, PQ quadrata, sive ut similia spatia triangularia his insistentia; si superior figura sit trilineum parabolicum quadraticū, inferior erit parabolicum cubicum, & sic de aliis; tum parabolarum speciebus, tum curvarum generibus; quocirca eamdem demonstrationem iis applicare potes, aut universaliùs ipsum Lemma concipere sic. In qualibet curva QRS, cujus ordinatæ PR, FS (sumpto FQ pro axe) sint in eadem ratione cum spatiis PORQ, FNRQ per easdem ordinatas abscissis ex figura NRQF eidem axi applicata, erit subtangens GT ad PR, ut rectangulum, seu parallelogrammum OPB ad spatium OPQR; & conversim, si ut illud parallelogrammum ad hoc spatium, ita fuerit PR, seu BT ad TG, juncta GR erit tangens; nec refert cava ne, an convexa sint spatia, quæ comparanda sunt, eadem quippe ratio semper militat, aut parùm certè immutata. Hinc aliam habes tangentium ducendi methodum, aliasque, & alias veritates per te prudens Lector extundere poteris, sed (quod majori in pretio habendum est) hinc disces Veterum, & Recentiorum Geometrarum propositiones Universaliores reddere, attendendo, num proprieta-

tes, quas specialiter de quadam figura demonstrant ex peculiari ejus affectione pendeant, an verò ex communi pluribus Symptomate deriventur. Atque id revera est facere Universale, quod adeò deprædicant Metaphisici, & an per intellectum, an verò, ut barbarè loqui solent, etiam à parte rei dari possit, exquirunt. Quod quidem ipsis integrè decidendum relinque mi Lector, atque ab ea sollicitudine bonas horas aliis utilioribus studiis debitas redimere satage, spondeo enim, aliquot sæculorum myriadibus antequàm illi conveniant, & quod tot tricarum apparatu expiscari contendunt in aperto ponant (uti hactenus certè incassum laborasse video, nec à tot sæculis, vel latum unguem profecisse, aut aliquam saltem inde utilitatem in Philosophicis, aut Theologicis rebus inde sibi, aliisve exculpsisse, plus nimiò expertus agnovi) Te innumerabiles, atque utilissimas veritates geometricas invēturum per illud, quod superiùs descripsi, Geometricum Universale, ejusdemq; applicationem ad multiplices figurarum species, quas aut Geometria ministrat, aut sibi facilè unusquisque fingere poterit.

9 Nec intereà omittendum, quòd Spirali Geometricæ rursus quid simile contingit, quod ipsi Logisticæ, subtangens enim




CB prioris radii AC est ad quemvis arcum AF, aut Af, ut

ut parallelogrammum hyperbolæ inscriptum K A C ad spatiũ correspondens M I A K, aut m i A K, quod, tum eadem methodo probari potest, tum & de se patet, quum ex dictis *cap. præced. num.* 10. prima subtangens C B sit eadem, quæ erat subtangens Logisticæ, ex cujus convolutione, juxta dicta *cap.* 1. *num.* 12. Geometrica Spiralis gignitur, ordinatis in radios commeantibus, & axis portionibus, ejusve parallelis in arcus curvatis, ac propterea eadem erit ipsius C B ad arcum A F ratio, quæ prius erat subtangentis ad parem axis portionem, ejusve parallelam, adeoque eadem, quæ parallelogrammi prædicti ad assignatum hyperbolicum spatium.

10 Exinde autem habetur, quod spatia illa hyperbolica, aut sectores iis æquales, de quibus *num.* 5. in ea semper ratione eruntᵹ ad correspondentes circulares sectores, in qua minima ordinatarum spatii hyperbolici A K ad semissem subtangentis C B; etenim si A K supponatur æqualis dictæ subtangenti C B, erit ut rectangulum K A C ad spatium hyperbolicum K A I M [quod sumi poterit latitudinis A I infinitè parvæ, ut ferè coincidat cum inscripto rectangulo K A I ] idest ut C A ad A I, ita ipsa K A, vel ipsa C B ad arcum A F, ex numero superiori; rectangulum igitur K A I, seu spatium ipsum hyperbolicum M I A K erit æquale rectangulo radii C A in arcum A F, hoc est duplum sectoris A C F; cùmque ex dictis *num.* 5. & alii sectores aliis spatiis in eadem sint ratione, singula spatia K A I M, K A i m, aut hyperbolici sectores K C M, K C m, dupli erunt respondentium sectorum circularium A C F, A C f; & si A K æqualis fuerit semissi C B, erunt dicta spatia, & sectores hyperbolici ad circulares sectores in ratione æqualitatis; si quis autem obrepserit scrupulus circa hanc demonstrationem, remedio numeri septimi ritè applicato amoliendus erit.

* *Nota, demonstrationem horum numerorum* 9. *&* 10. *appellare figuram* 3. *Diagrammatis appositi proximo num.* 9. *in adversa pagina.*

ni Jam oſtendendum eſt, quòd parallelogrammum Aſymptotis, & Hyperbolæ inſcriptum eſt ad ſpatium hyperbolicum, cujus extremæ ordinatæ duplam proportionem ſervent, proximè ut 10 ad 7. Eſto A L B E quadratum hyperbolico

ſpatio, quod hyperbola A G, aſymptotis L B F continetur, inſcriptum; & ſumpta F E æquali ipſi E B, ordinetur F G: erunt ordinatæ A E, F G in ratione dupla. Dico quadratum E L ad ſpatium A H G F E (adeòque & quodvis parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium ordinatis rationis duplæ interjectum) eſſe proximè, ut 10 ad 7. ducta enim diametro B A, & juncta A F (quæ tangens erit, quoniam extenſa ad alteram aſymptoton bifariam ſecaretur in A, prout B F bifariam ſecaretur in E) ductaque G D, & H I C N K aſymptoto B F parallelis; quoniam rectangula A L B, H K B æqualia ſunt, & communi ablato B E C æqualia remanent E C H, K C A, erit H C ad C A, vel C I (ob angulum E A F ſemirectum) ut K C, ſeu E A ad E C, & dividendo, H I ad C I, vel C A, ut C A ad C E; cùm igitur ſint E C, C A, I H continuè proportionales, erit tertia I H æqualis quadrato ſecundæ C A diviſo per primam C E; itaque ſi E A dicatur æqualis $a$, & quælibet portio A C dicatur $c$, erit H I æqualis $\frac{cc}{a-c}$; intelligatur ergo A E in 100. æquales particulas divi-

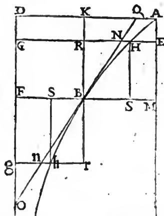
*Supple in Diagrammate lineam F G ipſi A E parallelam, claudentem ſpatium hyperbolicum.*

vidi, quarum A D erit 50, & si ab A sumantur per ordinem 1, 2, 3, &c. ejusmodi particularum, & calculo exprimantur lineæ in trilineo A M G respondentes, prout H I correspondet ipsi A C, invenietur hæc series $\frac{1\times1}{100-1}$, $\frac{2\times2}{100-2}$, $\frac{3\times3}{100-3}$, &c. usque ad $\frac{50\times50}{100-50}$; hæc enim est expositio universalis expressionis suprapositæ $\frac{cc}{a-c}$ pro diverso valore ipsius $c$; idest rectæ illæ, velut I H, in trilineo A M G parallelæ, & ad centesimas quaslibet ipsius A E partes applicatæ, erunt per ordinem $\frac{1}{99}$, $\frac{4}{98}$, $\frac{9}{97}$, &c. usque ad $\frac{2500}{50}$, quod æquatur ipsi M G 50 ejusmodi particularum. Summa igitur harum omnium fractionum designabit proximum valorem, seu quantitatem trilinei A M G, respectu quadrati A E B, quod est in hac suppositione 10000; porrò illæ fractiones ad minimos terminos redactæ, & simul additæ dant circiter 700 (ut experiri unusquisque poterit, si satis otii, & patientiæ habuerit ad calculi laborem ferendum) triangulum verò A D M æquatur dimidio quadrati A D, scilicet 50 ducto in 25, quod est 1250 & parallelogrammum G D E F, quadrati A E subduplum, est 5000, igitur summa ex trilineo, triangulo, & parallelogrammo, nempe spatium hyperbolicum A G F E est 6950, ut ex hac formula patet.

| | |
|---|---|
| Trilineum A M G | 700 |
| Triangulum A D M | 1250 |
| Parallelogrammum G D E F | 5000 |
| Summa, spatium G A E F | 6950 |

Proportio itaque spatii A G F E ad quadratum A E B L est eadem, quæ 6950 ad 1000, seu, dividendo utrobique per 50, ut 139 ad 200, quæ est circiter 140 ad 200, aut subdividendo per 20, ut 7 ad 10: & hoc fuerat demonstrandum.

12 Jam V. Theorem. Hugenii demonstrationē sic expedio. Sit A D dupla D K, seu F B ordinatæ ad Logisticā A B h; erit F D intercepta axis inter ordinatas duplæ proportionis; ostēdendum est F O subtangentem, seu parametrum Logisticæ




esse ad F D, vel B K proximè, ut 13 ad 9. Jam ex dictis *num.* 6. est F O ad B K, vel D F, ut parallelogrammum inscriptum hyperbolæ ad congruum spatium hyperbolicum, quod in hoc casu (si intelligatur super A D descriptum, & ordinatis ex A, & K definitum) terminabitur ordinatis duplæ proportionis, propter A D duplam D K; sed illud parallelogrammum ad tale spatium hyperbolicum ex *præcedenti numero* est proximè, ut 10 ad 7, ergo & O F ad D F, vel B K erit proximè in eadem ratione 10 ad 7, aut utrobique per 13 multiplicando, ut 130 ad 91, quod proximum est rationi 130 ad 90, hoc est 13 ad 9. Ratio igitur subtangentis ad axis portionem interceptam ordinatis duplæ rationis proximè est, ut 13 ad 9, uti Hugenius in hoc Theoremate proposuerat.

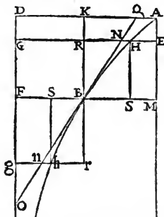
CA-

# CAPUT VII.

*Sextum Theorema proponitur, & universaliùs demonstratur. Spatia Logistica in data ratione dividere; Cavum trilineum convexo æquale; rectangula spatiis Logisticis æqualia. Item spatiis hyperbolicis. Ordinatæ in trilineo Logisticæ, axi parallelæ, convexis, & cavis hyperbolæ segmentis proportionales. Eadem aliis figuris applicare. Hyperbolam ducere, quæ datam Logisticam, vel in dato puncto contingat. Maximum parallelogrammum Logisticæ inscribere, & duo utrinque æqualia determinare. Data cujusvis figuræ tangente maximum illi parallelogrammum inscribere, & contra. Idem circa alia maxima præstare per alias hyperbolas. Infinitarum hyperbolarum tangentes. Spiralis geometricæ spatia inter se, & cum suis partibus comparantur. Cujusvis convolutæ figuræ, ejusve partium ad circumscriptum sectorem, & ejus zonas proportio eadem, quæ Conoidis ab evoluta figura, ejusve partium ad circumscriptum cylindrum, & tubos cylindricos. Evolutæ ad convolutam ratio, quibus composita. Exempla in Spiralibus. Geometricæ Spirali doctrina applicatur.*

1 PRopofuit in Sexto Theoremate Hugenius, quòd, *si fuerint tres ordinatæ, velut in hac figura sunt AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur asymptoto parallela secans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ easdem secans in N, & Q; spatia trilinearia ABK, HBR*

*HBR sunt inter se, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, ideſt, ut AQ, HN.* Quod quidem ferè cum ſecundo Theoremate coincidit, poteſtque ex *cap.* 4. *num.* 4. dictis demonſtrari, ut patebit, applicando demonſtrationem




lineæ gh minuſculis litteris expreſsæ, ſecanti tangentem in n, axi parallelam per B ductam in r; patebit enim interceptas tangenti, & Logiſticæ curvæ, ordinatis parallelas, ſive infra, ſive ſupra punctum contactus eſſe, ut ſpatia comprehenſa iiſdem ordinatis, Logiſticæ curva, & axi parallela per contactum ducta, adeòque ſecundum, & ſextum Theorema in unum convenire.

3 Sic igitur argui poterit. Cùm ſit OF ad FB, ut BK ad KQ, erit OF in KQ æquale FBK rectangulo; ſed FO in BM, ſeu in totam KA æquatur toti ſpatio DABF per *cap.* 4. *num.* 3. igitur FO in reſiduam QA æquatur reſiduo ſpatio KAB: eodem modo oſtendetur OF in RN, ſeu rn æquale rectangulo FBR, FBr; adeòque cùm ſit HGFB, hgFB, æquale FO in BS, ſeu HR, vel hr, erit ſpatium RBH, rBh, æquale FO in NH, nh; adeòque trilineum AKB ad HRB, ſeu hrB, erit, ut AQ ad NH, ſeu nh, quæ ſunt baſes rectangulorum ſub communi altitudine ſub-

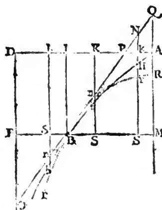
tan-

tangentis FO illis ſpatiis æqualium. Et hoc fuerat demonſtrandum.

3 Hinc facile erit quævis Logiſticæ ſpatia, ſive concava, ſive convexa per ordinatas in data ratione dividere; ſpecialiter autem hinc inferre juvat, quòd ſi ex quovis puncto H Logiſticæ ducatur tangenti O N parallela occurrens curvæ ultra cõtactum in h (finge ductam, licet in Schemate deficiat) erit portio Logiſticæ concava H R B æqualis convexæ h r B, propter æquales H N, h n, iis parallelis interceptas; imò addito utrinque ſpatio B H S, cum rectangulo S B r, inferes rectangulum H R r æquale eſſe ſpatio Logiſticæ, curva H h, ipſaque H S ad h r extenſa, intercepto; indeque rectangulum G R r æquale reſiduo ſpatio G H B h g, æquale proinde & rectangulo ex O F ſubtangente in R H cum r h, ſeu in s S, adeòq; O F ad G g ſe habere, ut G R, ſeu B F ad s S; ſed nimiùm minutis detineor.

4 Expendere potius juvabit, quibus ſpatiis proportionales ſint lineæ in trilineo N B H, aut n B h, parallelæ, non quidem ordinatis, ſed ipſimet axi. Inter aſymptotos A D, D F ducatur per ipſum punctum B Logiſticæ hyperbola r B r r R; ante omnia oſtendendum eſt, tangente Logiſticæ O B occurrente

supremæ ordinatarum, seu asymptoto hyperbolæ in P, rectangulum B k P æquari spatio hyperbolico k B r R A; est enim rectangulum B k P ad k B F rectangulum hyperbolæ inscriptum, ut illius basis P k ad basim hujus k D, seu B F, hoc est, ob similitudinem triangulorum, ut k B ad subtangentem Logisticæ F O, indeque ex *cap. præced. num.* 6. ut hyperbolicum spatium A R r B k ad idem parallelogrammum F B k;



æqualia igitur sunt rectangulum B k P, & spatium hyperbolicum A R r B k: quod fuerat demonstrandum; sed & alibi generaliùs idem ostendemus, scilicet *cap.* 13. *nu* 2.

5 Cùm verò ex *cap. præced. num.* 4. spatium hyperbolicum k B R A ad quodvis aliud axi Logisticæ parallelis resectum k r R A sit, ut k B ad k h, & dividendo spatium hyperbolicum k B r k ad r R A k, ut s h ad h k; manifestum est, sumpta communi altitudine k P dictarum linearum in k P ductarum rectangula proportionari spatiis hyperbolicis correspondentibus, adeòque rectangulum P k in k h æquari spatio k r R A, & rectangulum ejusdem P k in s h æquari spatio k B r k, &c.

6 Parallelæ igitur axi Logisticæ, trilineis N B H, n B h conclusæ, proportionales erunt respectivis trilineis hyperbolicis r B s,

r B s, r B s convexis, aut concavis, prout citra, vel ultra B parallelæ ducuntur; etenim demonstratione *num.* 3. iterum applicata; cùm sit k P ad B k, ut B M ad M Q, vel B S ad S N, & B s ad s n. Erit rectangulum k B M, vel k B S, aut k B s æquale rectangulo ex P k in M Q, S N, vel s n; sed etiam spatium B k A R, aut B k k r æquatur ex *num præced.* rectangulo ejusdem P k in M A, aut S H, vel s h; igitur rectangulum ex P k in residuam A Q, vel H N, aut h n æquale erit trilineo hyperbolico R B M, aut r B S, &c. & ideò lineæ A Q, N H, n h axi Logisticæ parallelæ, ejusque curva, & tangente conclusæ, erunt ut respectiva hyperbolica spatia supra definita. Quod erat demonstrandum.

7 Aliis figuris similem comparationem suscipientibus, ut ordinatæ unius proportionales sint spatiis abscissis alterius, applicari res eadem potest, quemadmodùm, tum hìc, tum alibi locum habere possunt observationes, & corollaria similia his, quæ *num.* 3. indicavimus; specialia verò problemata duo ex sola figuræ præmissæ inspectione facillimè solves. Alterum: Inter asymptotos F D, D A, quarum illa sit axis, hæc ordinata Logisticæ A B h, hyperbolam ducere, quæ Logisticam in aliquo puncto B tangat; vel dato in Logistica puncto B, hyperbolam nihilominus reperire, quæ idem præstet: ponatur D F æqualis subtangenti F O: ordinata F B, & D A, fiat per B hyperbola inter asymptotos F D A; hæc proculdubio Logisticam tanget; siquidem eadem O B, tum Logisticæ, tum Hyperbolæ tangens communis erit; unde consequitur, quòd, si fingatur per aliud punctum B ducta hyperbola, occurret in alio puncto eidem Logisticæ, supra B quidem, si F D major fuerit subtangente, infra verò si minor. Alterum est. Logisticæ maximum parallelogrammum inscribere: ponatur D F subtangenti æqualis, & ordinetur F B: patet D F B maximum fore omnium, quæ dato Logisticæ spatio inscribi possint, parallelogrammorum; alia siquidem parallelogramma eidem Logisticæ spatio inscripta minora erunt, eò quod, ut illud primum adæquent, extendenda sint usque ad perimetrum hyperbolæ per B descriptæ, quæ tota ultra Logisticam cadit, utpotè ipsam tangens ex nuper dictis: unde patet, cuivis alteri

pa-

parallelogrammo aliud æquale eidem Logisticæ inscriptum exhiberi posse, ducta scilicet per punctum, ubi Logisticæ occurrit, Hyperbola, quæ in alio puncto Logisticam secans dabit punctum, ad quod inscribatur parallelogrammum æquale priori, eo quòd utraque spatio asymptotis, & hyperbolæ interjecto inscribantur.

8 Leviuscula quidem hæc, si per sese considerentur, at ratione methodi, quam generalem esse Lectorum sollertia percipiet, suo pretio non fraudabuntur: hinc enim habebimus, data ratione, quam habere debet subtangens ME figuræ

ABHG ad abscissam AE, dari & maximum parallelogrammum EBL ipsi inscriptibile, si nimirum in eadem data ratione fiat GE ad EA, ut GE, EM sint æqualia, tangens quippe MBI erit & tangens hyperbolæ CBC per B inter asymptotos AG, GH ductæ, atque adeò quodvis aliud parallelogrammum GFDK datæ figuræ inscriptum minus erit parallelogrammo GFC, atque adeò minus GEB, quod proinde maximum esse convincetur; & è contra dato maximo parallelogrammo GEBL figuræ ABHG inscripto, dabitur ejus tangens, posita EG æquali EM, quia quodvis aliud paral-

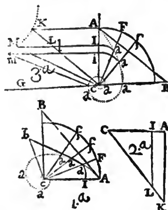
rallelogrammum GFD cùm sit minus ipso GEB, erit & minus GFC (ducta per B inter easdem asymptotos hyperbola CBC) & ideò FD minor erit, quàm FC, & hyperbola CBC curvam DBD tanget; sed hyperbolam tangit recta MB, ergo & curvam DBD propositam. Et quod de parallelogrammis maximis dictum est, assumpta hyperbola lineari, potest ad maximos cylindros, aliave maxima facta ex gradibus coordinatarum EB, BL transferri, usurpatis alterius generis hyperbolis, quadratica, cubica, &c. in quibus facta ex homonymis coordinatarum gradibus sunt æqualia, eò quòd quadrata, aut cubi ordinatarum reciprocentur distantiis à centro, seu angulo asymptotali.

9 Quod si earumdem infinitarum hyperbolarum, in quibus videlicet non simplices lineæ BL, CN, sed ipsarum quadrata, aut cubi, aliique majores gradus sint in reciproca ratione distantiarum GN, GL, earumve, graduum quorumcumque, tangentes ignorare te dicas: ne desponde animo, paucis, adverte, docebo, & quidem ex hac ipsa, quam præ manibus habemus, methodo demonstrationem eruendo: exponens graduum, quos consideramus in ordinatis BL, CN esto $x$, graduum verò, qui considerantur in distantiis NG, GK esto $y$; ducta ex quolibet hyperbolæ puncto BE asymptoto parallela, fiat GE ad EM, ut $x$ ad $y$, juncta MB tanget; quia enim ut $x$ ad $y$, ita GE ad EM, factum ex gradu GE, cujus exponens $x$, in gradum EM, cujus exponens $y$, maximum erit omnium similium factorum ex partibus lineæ GM utcumq; divisæ, uti ex maximorum, minimorumque methodo facilè constat; quare & factum ex similibus gradibus GEB maximum erit omnium similium factorum ex lateribus parallelogrammi triangulo MIG ad aliud, quàm B punctum inscripti; quæ igitur linea tangit figuram triangularem MIG in B (ipsum nempe latus MI) tanget in eodem puncto hyperbolam CBC ex iisdem gradibus coordinatarum constitutam.

10 Jam ad institutum nostrum, unde paululum divertimus, propiùs accedentes, quemadmodum in Logistica Hugenius propos. 1. 2. & hac, quam præ manibus habemus, sexta, varia ejus segmenta invicem comparavit; ita, ut in Logistica con-

vo-

voluta, nempe Spirali Geometrica, idem nos præstemus, argumenti similitudo suadet. Primùm igitur, sicut Logisticæ spatia post quamlibet ordinatam in infinitum protensa sunt, ut ipsæ ordinatæ ex dictis *cap.* 3. *num.* 7. ita Spiralis geometricæ spatia post quemlibet ejus radium in infinitum circa centrum per innumeras, sibique superimpositas circulationes continuata sunt inter se, ut quadrata eorumdem radiorum; intellecto enim spatio Spiralis A a a C in triangula innumera, ut *cap.* 1. *num.* 11. factum est, distributo, quæ ex ibi dictis similia erunt, A C a, a C a, &c. erunt singula inter se, ut homologorũ

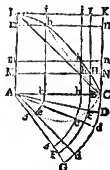



radiorum quadrata, quæ continuè proportionalia sunt, juxta curvæ hujus naturam; itaque ut unum A C a ad unum a C a, ita omnia spatio A a C inclusa ad omnia inclusa spatio a a C (sunt quippe totidem hìc, atq; ibi, utpotè multitudinis utrobique infinitæ) nempe, ut quadratum A C ad quadratum a C, ita spatium, quod post A C intra dictam Spiralem convolvitur, ad spatium, quod post a C eadem Spirali concluditur.

11 Hinc dividendo habetur, spatium A C a esse ad infinitè contortum post minorem radium C a, ut differentia quadratorum A C, a C, seu C I ad minoris a C, vel C I quadratum, hoc est, ducto arcu a I, ut armillæ portio F A I a ad sectorem I a C,

I a C, ſicuti *cap.* 3. *num.* 8. & in Tertio Theoremate Hugenii demonſtrando *cap.* 4. *num.* 5. oſtendimus, in Logiſtica ſpatium duabus ordinatis interjectum eſſe ad infinitè longum poſt minorem ipſarum protenſum, utì eſt differentia ipſarum ordinatarum ad minorem ex ipſis; & veluti in primo Hugenii Theoremate *cap.* 3. demonſtrato, ſpatia Logiſticæ ordinatis concluſa erant, ut extremarum ordinatarum differentiæ, ita in Spirali geometrica ſpatia quælibet A c a, a c a erunt inter ſe, ut differentiæ quadratorum ab extremis radiis dicta ſpatia comprehendentibus, ſive ut circulares armillæ F A I, f a i illis adſcriptæ.

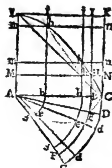
12 Trilineis verò a I A, ſive ad invicem, ſive cum reſiduis a A F, aut cum zonis F A I a comparandis inſerviet generale hoc Theorema. Si quævis figura L H C, axe A L in punctum



A contracto, illique parallela K C in arcum C G æquabiliter curvata, tranſeat in Spiralem C E A, ordinatis H M, h m in totidem ejus ramos, ſeu radios A E, A e abeuntibus, & per angulum E A e divaricatis, cujus menſura ſit arcus D d æqualis intervallo ordinatarum, nempe ipſi M m, vel N n. Dico Spirale ſpatium C E A fore ad circumſcriptum ſectorē C G A, utì eſt conoides ex figura L H C circa axem L A ad circumſcriptum cylindrum ex parallelogrāmo A K circa eumdem axem revoluto. Ducto pariter quovis arcu E B, aliiſque lineis coordinatis, ut in figura, trilineum B C E fore ad cir-

L cum-

cumscriptam zonam BCDE, uti est annulus ex HCB circa axem revoluto ad tubum cylindricum ex circumscripto parallelogrammo HNCB circa eumdem axem, ac dividendo, trilineum BEC ad CED esse, ut sunt annuli ex ipsis HBC, HCN circa axem revolutis; quodlibet etiam trilineũ BEC ad aliud beC, aut CED ad aliud Ced esse, ut sunt annuli ex ipsis BHC, bhC, aut ex HCN, hCn circa ipsum axem;



portiones quoque BEeb, sive ad aliam beeb, sive ad trilineum quodvis BCE esse, ut respectivè inter se sunt annuli ex HBbh, hbbh, aut HBC circa ipsummet axem LA. Longior est propositio, quàm demonstratio. Arcus enim BE ad BF est, ut CD ad CG, scilicet ex constructione, ut CN ad CK, vel BH ad BI, nempe ut cylindrica superficies, quæ in conoide ex linea BH, ad cylindricam superficiem, quæ in cylindro per lineam BI circa axem revoluta producitur; & hoc semper, sive lineas majusculis litteris, sive minusculis notatas inter se compares; sunt autem tum arcus BF, in sectore concentrici, tum cylindricæ omnes superficies ex BI, concentricæ in cylindro, proportionales, quippe in eadem ratione distantiarum a centro A, vel axe AL; ergo ex Lemmate 29. Torricellii de dimensione parabolæ, omnes arcus concentrici in sectore ad omnes concentricos in spatio Spirali erunt, ut sunt omnes superficies cylindricæ in cylindro ad omnes cylindricas superficies in conoide; unde & dividendo, &

pro-

proportionales partes comparando, habebitur veritas Theorematis propositi.

13 Quandoquidem ob æqualitatem arcus C G cum axe figuræ L A, ducta subtensa L C, erit triangulum L A C æquale sectori C G A, atque adeò erit ad Spirale spatium in eadem ratione, in qua cylindrus conoidi circumscriptus ad ipsam conoidem, hinc figura quælibet evoluta ad convolutam rationem habebit compositam ex ratione sui ad triãgulum æquè altum in eadem basi, & ex ratione circumscripti cylindri ad conoidem ex ejus revolutione circa axem genitam. Cùm Spiralis Archimedea, ob æquabilitatem motuum, quibus componitur, habeat radios proportionales ordinatis in triangulo basi parallelis, indeque fiat convolutione trianguli axem habentis parem arcui sectoris circumscripti, fit inde, spatium spirale trientem esse circumscripti sectoris, quemadmodum conus ex triangulo triens est circumscripti cylindri; & cùm secunda Spiralis quadratica fiat convolutione parabolæ, cujus ad inscriptum triangulum ratio est sesquitertia, cylindri verò circumscribentis conoidem ab ipsa genitam ratio est dupla, ideò spirale spatium quadraticum erit semissis circumscripti sectoris, habebit verò parabola, ex qua gignitur, ad se ipsam in tale spatium convolutam, rationem compositam ex sesquitertia, & dupla, ideſt quam 8 ad 3. & sic deinceps applicationem prosequere mi Lector.

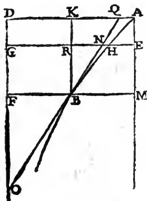
14 Ego ad Spiralem Geometricam revertor, in qua, utpote ex convolutione Logisticæ genita, jam scies Trilinea, initio *num.* 12. recensita, eam inter se rationem habitura, quam annuli ex correspondentibus Logisticæ portionibus trilinearibus circa axem revolutis, sive inter se, sive cum tubis cylindricis illos circumscribentibus comparatis, ubi geometricæ Spiralis trilinea cum zonis circularibus illa includentibus conferantur; quomodo autem illi annuli ex Logisticæ portionibus geniti notam habent quantitatem, nonnisi perspecta solidorum, quæ ex Logistica circa axem revoluta producuntur, mensura, ostendi potest; de qua re in nono Theoremate cum Hugenio, agendum erit, ideòque ex dicendis *cap.* 9. *num.* 10. defectus supplendus est.

L 2 CA-

# CAPUT VIII.

*Septimum Theorema pridem ostensum, ut nova demonstratione fulciatur, ostenditur, spatio à qualibet curva contento quò ad totum, & quò ad partes æquale spatium ex subtangentibus ad curvæ puncta applicatis, vel ad respectiva puncta basis: item ducta per quodvis punctum tangentibus parallela, occurrente ordinatis, puncta intersectionum esse in curva, quæ cum priori comprehendet spatium primæ figuræ duplum, adeòque cum ejus basi [ nisi hanc nova curva secet, ac congruo loco punctum acceptum sit ] spatium primo æquale. Eadem opera duæ ejusmodi curvæ describuntur. Eadem doctrina conversim accepta inventioni tangentium deservire poterit. Dimentio figuræ per normam, & perpendiculum descriptæ; Spatii Cycloidis, obiter ejus tangente determinata, dimensio, variorumque segmentorum proportio. Segmenta ejusdem quadrabilia. Cissoidalis spatii, ejusque segmentorum mensura. Spatium à Tractoria, & ejus axe interceptum æquale quadranti radio suæ tangentis descripto. Infinitarum parabolarum, hyperbolarum quoque infinitarum specierum, spiralium item cujusvis generis, etiam Geometricæ dimensio expeditur. Septimi Theorematis Hugeniani demonstratio ex hac doctrina eruitur. Octavum quoque Theorema pridem ostensum hinc novam demonstrationem assumit.*

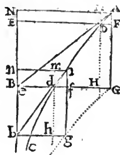
1 AD septimum Theorema gradum facimus. Illud Hugenius his verbis proponit: *Spatium infinitum inter ordinatam, Logisticam, & asymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum est trianguli comprehensi ordinata, tangente ad idem ordinatæ punctum, & subtangente. Sic in eadem figura spatium infinitum post ordinatam B F duplum est trianguli B F O.* Quod quidem ex dictis *cap.* 4. *num.* 6. evidenter deducitur, rectangulum enim subtangentis, seu parametri F O in ordinatam B F, quod loco citato ostensum est spatio infinito post

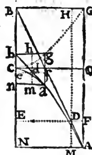



B F exporrecto æquale, utique duplum est trianguli B F O ejusdem basis, & altitudinis; sed aliam nihilominus demonstrationem adjiciemus ad pleniorem scientiam, & methodi varietatem, aliis detegendis veritatibus inservientem, uti ex his, quæ speciminum loco subjungemus, prudens Lector agnoscet; Vix certè figura ulla notæ hactenus descriptionis est, cujus dimensio ex fonte jam aperiendo non elegantissimè promanet: imò & infinitorum solidorum mensura hinc elici potest, ut patebit *capite sequenti nu.* 7. & distantia centri gravitatis variarum figurarum, ut *cap.* 11. *nu.* 6. constabit.

2 Sit

2 Sit curva quævis A D C circa axem B N, & ex quibusvis curvæ punctis A, a ductis tangentibus A B, a b, quæ cum



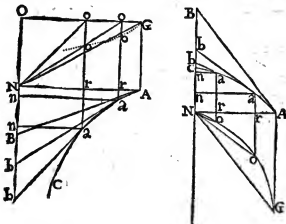




axe conveniant in punctis B, b, necnon ordinatis A N, a n, compleantur parallelogramma A N B G, a n b g circa ipsas tangentes, velut diametros consistentia; sicque semper fiat, ut per omnium parallelogrammorum angulos exteriores, idest per puncta G, g, transeat curva G g: comprehendet hæc cum priori curva A a C, & latere extimi parallelogrammi A G, spatium C a A G g æquale figuræ priùs positæ C a A N; sumpta enim quantùmlibet parva tangentis particula A D, a d, ac per D, d ductis axi, & basi parallelis M D H, E D F, m d h, e d f erunt rectangula G D, D N, g d, d n, utpotè complementa parallelogrammorum circa diametrum, invicem æqualia (potes & utrinque addere A D, a d, ut compares æqualia parallelogramma A H, N F, aut a h, n f; potes insuper directum parallelogrammum A H, a h in dextera figura commutare in obliquius intra easdem parallelas eidem nihilominus tangenti impositum, spatio autem C A G g meliùs adjacens ad evidentiorem circumscriptionem) & hoc semper in quolibet puncto eveniet, ergo cùm in utroque spatio hæc indefinitè parvæ latitudinis parallelogramma possint ab iis deficere, si inscripta sumantur, aut eadem spatia excedere, si circumscripta comparentur, minori defectu, aut excessu quolibet dato; constat ipsamet spatia C a A G g, C a A N integrè, & particulatim,

idest,

ideſt tum tota, tum eorum correſpondentes partes invicem cõparando, prorſus æqualia eſſe. Imò inde inferre potes, quòd, cùm totum parallelogrammum NG trianguli NBA ſit duplum, & complexum ex utraque figura gGAaC, & CaAN duplum ſolius CaAN, reliqua figura BGgC dupla erit trilinei CAB, curva CA, tangente AB, & axis portione, quam tangens intercipit, comprehenſi; id quod expeditæ multarum figurarum dimenſioni conducere poteſt.

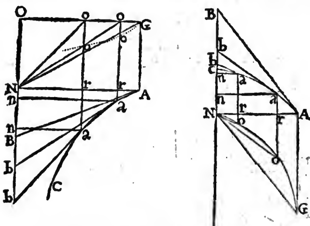
3 Hinc ſi in qualibet figura CAN, ductis ubilibet axi parallelis, primùm AG æquali ſubtangenti NB extimi puncti A,




tum aro, aro, reſectis ultra ordinatam AN ipſis ro, ro reſpectivè æquantibus longitudinem ſubtangentis nb, nb ad ſuum punctum a pertinentibus, quouſque compleatur figura ooGAN; vel etiam (quod in idem recidit) ſi per N punctum regula quædam NG converti concipiatur, ſecans axi figuræ parallelas ar, ar productas in punctis oo, itaut eadẽ regula NG, ſive No ſemper parallela exiſtat tangenti AB, aut ab, ſintque BAGN, baoN parallelogramma (quomodo rurſus ro æqualis erit reſpectivæ nb, auferendo ſcilicet ex æqualibus ao, bN, æquales ar, nN) Ex utraque

in-

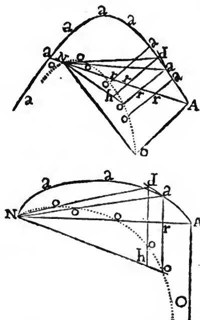
inquam hac descriptione colligitur, figuram o o G A N æqualem fore priùs datæ figuræ C A N, quemadmodum & partes correspondentes r A G o, n a A N semper æquales esse; quid enim hoc aliud est, quàm ipsas lineas A G, a g, ***num. præced.*** consideratas, directè deprimere in A G, r o, ut jam non ad




curvam, sed ad respectiva basis A N puncta terminentur? Spatium igitur C a A G g, servata singularum suarum linearum æqualitate, protrusum in N o o G A, erit, ut priùs, æquale ipsi C A N, nisi malis & hìc sumere infinitè parvam tangentis portionem, ferè cum curva A a coincidentem, & ex proportionalitate B N, seu G A ad r a, cum N A ad A r, inferre æqualitatem rectangulorum G A r, & A N n, ac similiter in reliquis, ut supra.

4 Vel etiam sumpta infinitè parva tangentis, aut curvæ portione A a, junctisque ad N radiis A N, a N, a N, ostendetur semper parallelogrammũ G A a duplum trianguli N A a, utpotè eidem basi A a, inter easdem parallelas A a, N G (aut a a, N o) insistentis, quare tota figura C a A G o o N totius C A N dupla erit, & dividendo spatium o o G A N ipsi C A N æquale erit; eo modo quo & in his bilineis curva, & re-

& recta comprehensis, velut a a A, aut N a A, accepto puncto N, sive in extremo basis, sive alibi, aut etiam intra figuram, & per N transeunte recta N o, quæ tangentibus a d

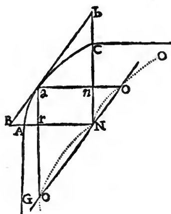


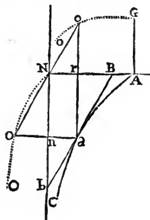

perpetuò parallela existens, secet ipsas a r, ad basim N A ordinatas, in punctis o, erit N o o A a N dupla trilinei, seu bilinei (prout integra sumitur, aut ejus pars ramis N a intercepta) N a A, propter parallelogrammum d a o h ubique duplum trianguli d a N; unde mirùm quot figuræ dimensionem accipiant.

5 Imò eadem opera possent duæ figuræ eidem datæ æquales constitui, si nempe regula mobilis per punctum N utrinque extendatur, ut occurrat ambis coordinatis ex eodem puncto,

M sci-

ſcilicet non tantùm ipſi a r axi parallelæ, ſed & a n parallelæ baſi in punctis o o; habebitur enim eadem ratione figura C N O o, tum priori C A N, tum eidem collaterali G O N A




integrè, & particulatim (ideſt quò ad totum, & quò ad partes proportionales) prorſus æqualis; ſicut viceverſa, ubi figura C N O, vel etiam G O N A alteri adjacenti C A N integrè, & particulatim modo præſcripto æqualis fuerit, ducta a b ramo N O parallela tanget curvam A a c in a; ſi enim ita non ſit, alia igitur, quàm N O, parallela erit tangenti a b, unde alia figura, quàm C N O o, fiet particulatim, & integrè æqualis ipſi A a C N, adeòque & ipſi primæ C N O, vel G O N A; quod inferret æqualitatem totius cum parte; multarum igitur curvarum tangentes hac methodo determinabis; cave tamen partium ordinem hactenus indicatum adamuſſim obſerves, in lubrico enim, ſi quidquam immutaveris, te fore prævideo. Placet autem compendii cauſa figuras hactenus deſcriptas *invicem Correlatas* appellare.

6 Quoniam verò tangentium alias methodos dedimus, in negotio dumtaxat dimenſionis figurarum paullò diutiùs immo-

morabimus, cujus ex hac methodo ſpecimina benè multa obvia ſunt. Proponatur primò figura N o o, cujus olim hanc geneſim excogitaveram ad circuli quadraturam promovendā. Norma ex regulis CN, N A ad angulum rectum CNA compoſitis in plano verticali circa punctum N ita convertatur, ut brachium N C determinatæ longitudinis exiſtens,

extremo ſuo C peripheriam quadrantis circularis C a a A deſcribat, brachium verò indefinitè extenſum N A infra orizontem versùs S inclinetur, ſeceturque in o à filo a o, pondere T perpendiculariter deſcendente extenſo, atque extremo regulæ N C, ſive N a alligato; itaque angulus a N o ſemper rectus erit; ſed & ducta circuli tangente a b rectus eſt N a b; æquidiſtat igitur N o tangenti a b; eſtque N o o figura quadranti Correlata; & ideò ſpatium curva N o o, radio N A, & aſymptoto A S interjectum æquale erit circulari quadranti C A N, ejuſque partes N o r, ſemiſegmentis arcu C a, ejuſque ſinu recto, & verſo comprehenſis æquales erunt, & zonæ o r r o zonis arcu a a, ordinatiſque ad axem N C interjectis æquabuntur, & interminata ſpatia o o r A S, ſpatiis

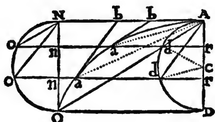
 ar-

arcu A a, radio A N, & finu arcus a C determinatis; præterea sectores convexi N C a, cavis sectoribus N a o æquales erunt, & portiones, curva N o, ejusque subtensa N o comprehensæ, trilineis arcu a c, ejusque tangente, & intercepta

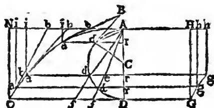
axis portione definitis æquabuntur, & arcus C a ad ejus finum, five ad N r, erit perpetuò, ut spatium N o a C ad rectangulum C N r, aut A N r, &c. Tangentem poscis ad quodlibet punctum o? divide bifariam N o; ex puncto divisionis ad punctum a junge rectam, quæ secabit N r in aliquo puncto; hinc juncta ad o tanget. Unde habetur, tangentem a b quadrantis N C A, productam usque ad radium N A, simul cum finu a r, seu linea o r ordinata Correlatæ N o o, & ramo N o, ac tangente, quam supra determinavimus ad punctum Correlatæ o, ipsum radium N A, usque ad occursum tangentis b a protensum, secare in harmonica proportione; seu abscissam N r ad subtangentem, quæ correspõdet puncto o, & ordinatæ o r, esse, ut o a cum a r ad ipsam a r. Eamdem lineam ab aliis postmodum descriptam inveni posita N o æquali abscissæ A S, sine relatione ad circulũ.

7 Spa-

7 Spatii Cycloidalis dimensio hinc etiam profluit; esto enim Cyclois A a O, cum circumscripto parallelogrammo




D N, ac per punctum N perpetuò feratur recta N O, parallela existens tangentibus Cycloidis a b, & occurrens ordinatis trilinei Cycloidalis, nempe ipsis a n productis in O. Constat figuram Correlatam, inde provenientem, N o o fore ipsummet semicirculum genitorem Cycloidis, quippe cujus chordis N o parallelæ sint dictæ tangentes Cycloidis, ut dudum Geometris innotuit, ac Torricellius indicavit, poteftq; ex generali nostra de tangentibus ex motuum compositione determinandis doctrina *cap. 5.* tradita sic paucis deduci. Gignitur Cyclois ex duplici motu, utroque æquabili, & æquè ve-




loci, altero per basim O D, cujus directio in puncto a est a d, altero per arcum semicirculi, cujus directio est tangens d B;

hac

hac igitur posita æquali lineæ d a, seu ipsi arcui d A, juncta B a erit tangens, utpote diameter Rhombi laterum æqualium

a d, d B, adeòque in qua est directio motus ex duobus æquè velocibus per latera a d, d B compositi; verùm quia tam angulus C d A simul cum A d B, quàm angulus C A d, simul cum A d r rectum constituunt, estque C d A æqualis C A d, etiam B d A ipsi A d r æquabitur; duplus est igitur B d r ipsius A d B; sed & duplus unius ex æqualibus internis d B a; itaque anguli d B a, B d A sunt æquales, sed & alterni; æquidistat igitur tangens a B chordæ circuli genitoris A d. Quoniam igitur præscripta figura N o o est semicirculus genitor, atque

ex ea, quam nunc illustramus, doctrina, æqualis est integrè, & particulatim trilineo O a A N, hoc sublato ex parallelogrammo N A D O, quod ejusdem semicirculi, ex Archimedeis do-

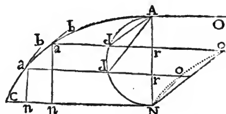
ctri-

ctrinis, sive utì & nos in Vivianeis ostendimus ad *Pr.* 36. *Cor.* 1. est quadruplum, residuum spatium semicycloidis O a A D triplum erit semicirculi genitoris. Sed & partium cavæ cycloidis, duabus tangentibus, & curva comprehensarum dimensio innotescet; putà spatium A b a semper æquale erit portioni circulari, arcu A d, ejusque chorda comprehensi, eo quòd spatium A d r spatio, *vide fig.* 1. A a 1, & triangulum A d r triangulo i b a sit æquale.

8 Sed & spatia trilinearia, *redi ad fig.* 2. a d A a, arcu circuli d A, curva A a, & ordinata d a comprehensa, dupla semper esse convincentur segmentorum cycloidis, curva A a, & subtensa A a comprehensorum; siquidem tota parallelogramma d A b a dupla sunt integrorum triangulorum a A b; sed segmenta cava cycloidis a A b, simul cum segmentis circularibus A d duplum efficiunt solius cavi cycloidalis segmenti a A b; igitur reliqua trilinea a d A dupla erunt residuorum segmentorum convexorum cycloidis A a; unde & zonæ a d d a duplæ erunt sectorum cycloidalium a A a, duabus subtensis, & curva a a comprehensorum. Hinc si ordinata a d esset ad semissem altitudinis cycloidis, sive per centrum C circuli genitoris transiret, quoniam tunc trilineum A d a quadrabile foret, utpote æquale ungulæ, seu figuræ sinuum quadrantis, ad cujus arcum applicaretur, ideſt æquale quadrato radii C d; tunc inquam segmentum convexum cycloidis a A quadrabile pariter foret (Leibnitio etiam id demonstrante) nempe æquale semissi quadrati radii; quòd si ordinata a d r sit ad quartam altitudinis partem, itaut A r sit æqualis semissi radii A C, quia sector circularis d A C duplus erit trianguli a d A (quippe in æqualibus basibus d A, d a ad altitudinem C A duplam ipsius A r) & trilineum cycloidale d A a, ex nuper dictis, duplum est segmenti convexi cycloidis A a, erit tota figura a A C d a dupla segmenti a A d, chorda A d, curva A a, & ordinatæ portione a d contenti; igitur dividendo, triangulum æquilaterum d A c æquale erit huic ipsi segmento; quod proinde quadrabile erit; unde & quadrabile, quod additione trianguli d A r conficitur, semisegmentum a A r, ejusque duplum in integra cycloide, æquale nimirum æquilatero triangulo, quod ge-

genitori circulò inſcribitur, utì Hugenio jam pridem innotuit; ſed & cycloidalia ſegmenta, quorum ſubtenſæ puncta conjungunt, alterum à tangente verticis, alterum ab ordinata per centrum circuli, æquè diſtantia facilem quadraturam admittunt, ſive ad eaſdem, ſive ad diverſas partes puncta jungantur, & zonæ binis ejuſmodi ſubtenſis interjectæ pariter quadrabiles inveniuntur, & ſegmenta, tum cycloidis, tum ſemicirculi genitoris, abſciſſa chordis, quarum extrema à verticis tangente, & à baſi æquè diſſita ſint ad eaſdem partes, æqualia oſtenduntur, ubi verò ad partes contrarias, æqualia ſemicirculo, ſimul cum rectangulo diametri in ſinum arcus reſpondentis, &c. in quibus immorari non vacat, quippe ad alia pergendum.

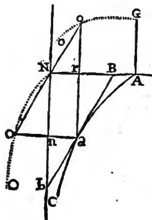
9 Quod etiam demonſtravit olim Hugenius, ſpatium Ciſſoide Dioclea ultra quadrantem continuata, ejuſque aſymptoto, & circuli genitoris diametro interceptum, triplum eſſe ſemicirculi genitoris, facillimè ex noſtra hac methodo deducitur, illud, ejuſq; ſingulas partes, cum cycloide, & ejus portionibus comparando. Sit enim ſemicyclois A C N, cujus ſemi-




circulus genitor A d N, ex quo etiam genita intelligatur Ciſſois N o o. Juncta ſubtenſa qualibet N o, atque ordinatis, ut in figura, patet junctam N d eſſe ipſi N o perpendicularem, propter d r, r N, r o continuè proportionales; æquidiſtat igitur ipſa N o chordæ A d, atque adeò & tangenti cycloidis a b; quod cùm ſemper eveniat, ſequitur totum ſpatium in-

infinitè longum o N A O toti, ſemicycloidi, & ejus ſingulas partes N o r ipſis portionibus C a n, & o r r o ipſi n a a n perpetuò adæquari; juncto autem ciſſoidi ſemicirculo A d N, totum ſpatium o o N d d A O ſemicirculi eſſe quadruplum, & partes o N d quadruplas ſegmenti N d, arcu ſcilicet, ac chorda his litteris deſignata comprehenſi, aut ſectores diametro A N, curvæ portione N o, junctiſq; ex A ad o chordis A o interjectos, eorumdem ſegmentorum circularium N d eſſe triplos, &c.

Si curva A a c fuerit Tractoria, qualem *cap.* 5. ſub finem *num.* 2. deſcripſimus, cujus nimirum tangens a b ejuſdem ubique eſt longitudinis, utique ei Correlata figura o o G erit




circuli quadrans, centro N, radio N A, quippe N O tangenti parallela, erit ubique æqualis, unde infinitum ſpatium à Tractoria, ejuſque Aſymptoto concluſum, quadranti circulari, radio tangentis deſcripto æquale demonſtrabitur, & partes proportionales ſegmentis congruis reſpondebunt.

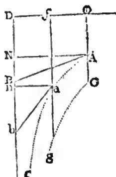
10 Quid de parabolarum infinitis ſpeciebus addam? Sanè, reſumpta figura *numeri* 2. *hujus Capitis*, conſtat, ſpa-

tium A a C g G esse duplicatum trilineũ parabolicum A C Φ, posito quòd ipsa C A N sit parabola quadratica, in qua subtangentes N B, sive iis æquales A G, duplæ sunt abscissarum N C, seu A Φ; itaque parabola A C N, utpotè æqualis spatio A a C g G, erit dupla trilinei A C Φ, sui nimirum complementi ad parallelogrammum circumscriptum, adeòque æqualis erit $\frac{2}{3}$ ejusdem circumscripti parallelogrammi; ubi autem subtangens N B abscissæ N C tripla fuerit (utì accidit in parabola cubica, seu in curva, cujus ordinatarum N A, n a cubi fuerint, ut partes axis N C, n C à vertice abscissæ) erit, eadem ratione, figura A a C G, adeòque & ipsa parabola C A N, tripla trilinei C A Φ, & consequenter æqualis $\frac{3}{4}$ circumscripti parallelogrammi; ac generaliter habebit cujusvis speciei parabola ad trilineum, seu complementum parallelogrammi ipsum circumscribentis, eamdem semper rationem, quam exponens potestatis suarum ordinatarum ad exponentem potestatum axis; ideſt in quadratica, ut 2 ad 1. in cubica, ut 3 ad 1. in quadratoquadratica, ut 4 ad 1. &c. In ea, in qua cubi ordinatarum fuerint, ut quadrata abscissarum, ut 3 ad 2. & in qua quadratoquadrata ordinatarum sint, ut cubi partium axis, ut 4 ad 3, &c. quippe in hac ipsa ratione erunt semper subtãgentes conflantes figuram A C G, parabolæ æqualem, ad abscissas conflantes dictum trilineum, ut dudum Geo-

me-

metris innotuit, poteſtque deduci ex generali tangentium conſtructione *cap.* 5. præſertim *num.* 4. & ſequentibus ad parabolas applicata.

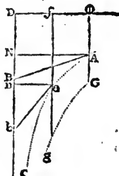
11 Eodem planè modo infinitas hyperbolas ad menſuram vocabis: Ac primò ſpatium Apolloniana hyperbola, ejuſque aſymptoto concluſum infinitum eſſe, ſic patebit: eſto talis hyperbola A a C, cujus aſymptoti Φ D, D B; manifeſtum eſt, ſubtangentes B N æquales eſſe diſtantiis à centro N D;




unde facta, juxta præſcriptum *num.* 2. figura g G A a C, erit perpetuò G A æqualis A Φ, g a æqualis a f, &c. & ſpatium g G A a C æquale ſpatio C a A Φ D b; ſed & idem æquale C a A N b; ſpatia igitur C a A Φ D b, & C a A N b ſunt æqualia; ſed primum excedit ſecundum parallelogrammo N A Φ D; ergo oportet utraque infinita eſſe; ex finitis enim, quod alterum ſuperat ſpatio finito, non eſt illi æquale, ſed tantùm in infinitis hoc locum habet; poſtea curva A a C ſupponatur eſſe hyperbola ſecundi gradus, in qua videlicet ordinatarum A Φ, a f quadrata reciprocè ſunt inter ſe, ut partes aſymptoti f D, D Φ; manifeſtum eſt ex dictis *cap. præcedent. num.* 9. diſtantias à centro D N, duplas fore ſubtangentium N B; itaque cùm ſemper in hoc caſu Φ A ſit dupla A G, fa

 du-

dupla a g; tota figura b D ⊕ A a C dupla erit ipsius g G A a C; adeòque dupla spatii huic æqualis C a A N b; & dividendo, spatium infinitum C a A N b æquale parallelogrammo hyperbolæ inscripto N A ⊕ D. In hyperbola tertii, aut quarti gradus, propter distantias à centro triplas, & quadruplas subtangentium, colligetur, spatium C a A N b esse semissem, aut




trientem, &c. parallelogrammi D A; & generaliter esse illud spatium ad hoc parallelogrammorum, ut exponens distantiarum à centro ⊕ D ad exponentem ordinatarum ⊕ A diminutum exponente earumdem distantiarum; seu si exponens distantiarum sit $y$, ordinatarum $x$, ut $y$ ad $x$-$y$, scilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 0. in secunda, ut 1 ad 1. in tertia, ut 1 ad 2. &c. in ea, in qua distantiarum quadrata essent, ut cubi ordinatarum, ut 2 ad 1. &c.

12. Spirales verò, aut quæ harum instar generari concipiuntur figuræ, numquid ab hujus methodi, & doctrinæ legibus excludentur? imò & ipsæ illius influxum in se derivare poterunt, sed suæ naturæ contemperatum; figura enim ex subtangentibus ad respectiva puncta radii applicatis, non quidem æqualis, sed dupla semper erit Spiralis figuræ sibi correspondentis, eò quòd harum figurarum elementa non sint parallela,

&

& parallelogrammis analoga, sed convergentia, & triangulis parallelogrammorum subduplis respondentia. Exempli gratia in Spirali Archimedea ad quemvis radium A C, vel a C ducta ex centro perpendiculari C B, aut C b æquali peripheriæ radii C A, aut respectivè arcui a I, qualem radius assumpto puncto A, vel a in sui conversione eò usque descripsit,

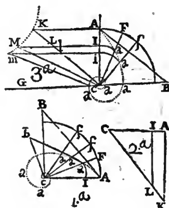
patet ex Archimede, imò & ex dictis *cap.* 5. *num.* 9. junctam B A, seu b a tangentem esse (debes autem mi Lector concipere, utut Schemma defæcerit, lineam b d directè tendere in a, ibidemque Spiralem tangere, & lineam A D concurrere cum C B in B, unde ducta quædam radio parallela occurrat parallelis subtangentis C B ductis ab extremo radii A, & à quovis tangentis puncto D, ipsis scilicet A F, D M, in punctis G, H, uti in minusculis litteris ipsa g b occurrit homonymis, & homologis lineis in g, b, atque demùm per D, seu d punctum radio parallelam actum esse, uti vides, F D E, f d e) puncto igitur D, seu d assumpto, quod contactui quàm proximum sit, completisque parallelogrammis D G, D C, seu d g, d c æqualibus, utpotè complementis parallelogrammo-

morum circa diametrum, patet junctis DC, dc, triangula CDA, Cda esse semissem æquè altorum, & eamdem basim obtinentium parallelogrammorum CAFE, Cafe; quare & semissis erunt æqualium illis parallelogrāmorum MAGH, magh; cùmque hæc triangula excedere possint Spirale spatium CAaC minori excessu quolibet dato, constat ipsum

integrum Spirale spatium omnium ejusmodi parallelogrammorum MG, mg ad minimam latitudinem redactorum, & in unam figuram confluentium (quod fit, ipsis lineis AG, ag ad respectiva puncta ejusdem radii CA in eadem à centro distantia applicatis, scilicet AG in AK, ag in IL, existente CI æquali ipsi Ca, & sic ubique, quousque compleatur figura CLKA, quæ in hoc casu erit trilineum parabolicum, eò quòd subtangentes, quemadmodum & arcus, quibus æquātur, in duplicata radiorum ratione procedunt, ut monuimus *eodem cap. 5. num. 9.*) subduplum esse; atque adeò cùm tale trilineum CKA, duplum spiralis spatii, constet, ex dimensione parabolæ, esse duos trientes trianguli sub radio CA ut altitudine, & AK ut basi, idest duos trientes circuli radio CA,

aut

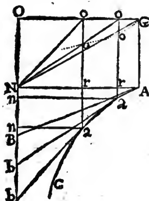
aut correſpondentis ſectoris radio a C, vel C I deſcripti, & ipſum Spirale ſpatium circumſcribentis, habetur, ſpiralia ſpatia trientem eſſe circularium ſectorum eadem circumſcribentium. Similiter aliarum ſpecierum ſpiralia ſpatia per correſpondentia trilinea parabolica *cap.* 5. *citat.* indicata metiri poteris, & cum ſectoribus circumſcriptis comparare; ſed & Spiralem Geometricam, ſeu Logarithmicam A a a invenies




comprehendere, poſt infinitos ſibi ſuperimpoſitos cincinnos, cum radio C A ſpatium ſubduplum circumſcripti trianguli A B C; figura enim C L K A ex ſubtangentibus ad congrua radii puncta applicatis hìc in triangulum degenerat, quia ob æqualem ſemper inclinationis angulum C A B, C a b, triangula rectangula C A B, C a b ſimilia evadunt, & ſubtangentes C B, C b, ſeu his æquales A K, I L in eadem radiorum A C, C a, vel C I ratione; Unde habes confirmationem eorum, quæ *cap. præced. num.* 10. & 11. circa hujus ſpatii comparationem attulimus.

13 Hanc igitur tot exemplis illuſtrem doctrinam ad propoſitum applicantes, ſeptimum Hugenii Theorema ſic demonſtra-

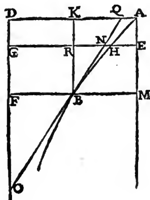
ſtrabimus. Subtangentes Logiſticæ A a a C ſint N B, n b, n b, quæ ad reſpectiva puncta A, r, r applicatæ A N referantur in A G, r o, r o; eſt igitur figura N A G o O æqualis ſpatio poſt ordinatam A N, aſymptoto, & curvæ interjecto, juxta hanc doctrinam; verùm & idem ſpatium N A G convincitur eſſe rectangulum ſubtangentis N B in ordinatam




N A, eò quòd ex dictis *cap.* 5. ſubtangentis longitudo N B, n b, ſive jam A G, r o, ſit ſemper eadem; itaque ſpatium infinitum, quod poſt quamvis Logiſticæ ordinatam exporrigitur, æquale eſt rectangulo ſub eadem ordinata, & ſubtangente, atque adeò eſt duplum trianguli ejuſdem baſis, & altitudinis, quod ordinata, tangente, & ſubtangente comprehenditur, uti Clariſſimus Auctor in hoc Theoremate nobis demonſtrandum propoſuit.

14 Sed & ſequens Theorema octavum, videlicet, quòd *ſpatium duabus ordinatis interjectum æquale eſt rectangulo ſubtangentis in differentiam earumdem ordinatarum, uti in ſequenti figura ſpatium A D F B æquatur rectangulo ſubtangentis F O in K A*, quod quidem *cap.* 4. *num.* 4. ſatis oſtenſum eſt; at-

atque ex iis, quæ aliàs diximus, facilè ostendi potest, ex hac ipsa doctrina iterum ex abundanti demonstrari potest, quippe in figura paragraphi antecedentis, nedum totum spatium infinitum C A N B toti rectangulo N A G O probatur æquale, sed & ejus pars quælibet N A a n parti




correspondenti A r o G, ex subtangentibus curvæ A a ad ipsam A r applicatis genitæ, quæ est rectangulum subtangentis in differentiam ordinatarum; nec juvat ampliùs hìc immorari. Ad solida transeamus.

* *
*



# CAPUT IX.

*Prima Noni Theorematis demonstratio. Hinc solida omnia ex infinitis Logisticæ spatiis esse ostenduntur, ut quadrata radiorum basis, & portiones, ut differentiæ quadratorum à radiis extremis. Alia Logistica in duplicata ordinatarum prioris ratione spatium comprehendit prioris subduplum, item subtangentem subduplam habet: generaliter quæcumque fuerit Logistica, ejus spatium, & subtangens tam submultiplex erit prioris, quàm submultiplicata ordinatarum ratio. Idem nonum Theorema secundò demonstratur. In Correlatis figuris solidum ab exteriori duplum semper est solidi, quod ab interiori circa axem revoluta describitur, & partes partium respondentium. Hinc tertia ejusdem Theorematis demonstratio. Dimensio solidi ex figura quadranti correlata, ejusve partibus tum concavis, tum convexis, item solidorum ex trilineo cycloidis, ipsave semicycloide circa tangentem verticis revoluta, ejusque partium. Solidorum quoque ex spatio Cissoidis concavo, aut convexò, tum circa asymptoton, tum circa ei parallelam ex vertice. Conoidum ex infinitis parabolis ad circumscriptos cylindros, vel conos, item solidorum ab infinitis hyperbolis ratio ad inscriptos cylindros nota.*

1 IN hoc nono Theoremate ita pronunciat Hugenius: *Solidum*, inquit, *productum ab infinito spatio post aliquam ordinatam in conversione circa asymptoton est sesquialterum Coni*, cu-

*cujus altitudo æquetur subtangenti, & basis semidiameter æqualis sit ordinatæ: ita solidum productum ab infinito spatio B F O I in conversione circa F O, sesquialterum est Coni geniti ex triangulo B F O circa eamdem E O revoluto.* Hujus prima demonstratio sic institui potest. Intelligantur huic solido circumscripti innumeri cylindri F M, Q R, P S, &c. æqualis ubique altitudinis F Q, Q P, P T, &c. indefinitè exiguæ, itaut horum

cylindrorum congeries pro ipso rotundo solido sumi queat, & tangentis O B portiuncula primo cylindro F M intercepta ferè cum ipsa curva B N coincidat, seu ad ipsam obtineat rationem minorem qualibet inæqualitatis majoris ratione assignabili (hoc enim ex vulgatis methodis fieri potest) designetur etiam O H æqualis subtangenti O F.

2 Jam sic: Hæc series cylindrorum, qui inter se sunt, ut basium F B, Q N, P V continuè proportionalium quadrata, est quædam Geometrica progressio solidorum proportionaliũ in infinitum continuata; igitur ex demonstrationibus, sive Cavallerii, sive Torricellii, sive Gregorii à S. Vincentio, omniũ terminorum aggregatum (ideſt rotundum solidum, de quo loquimur) erit ad primũ terminũ (scilicet ad cylindrum M F)

ut ipse primus terminus ad primam differentiam, hoc est, ut quadratum FB ad ejusdem differentiam à quadrato QN, vel ut quadratum FO ad rectangulum HQF, quo differt ipsum quadratum FO ab OQ ex vi constructionis, & hypothesis præmissæ. Cùm ergo ratio solidi rotundi ad inscriptum conum, ex triangulo BOF genitum, componatur ex ratione talis solidi ad primum cylindrum FM, & ex ratione ejusdem cylindri FM ad conum FBO, quarum prima, ex dictis, est eadem, quæ OF quadrati ad rectangulum HQF, secunda verò eadem est, quæ QF ad trientem altitudinis OF propositi coni, aut rectanguli HQF ad HQ in trientem OF, ideò erit solidum rotundum Logisticæ ad prædictum conum ut quadratum OF ad rectangulum HQ in trientē OF, nempe in composita ratione ex OF ad QH (quæ est ratio subdupla, propterea quòd HQ differat ab HF differentia QF indefinitè parva, & re ad minimos cylindros redacta, penitus evanescente) & OF ad trientem sui, quæ est ratio tripla; ex his autem composita ratio est sesquialtera, ut patet in his numeris 3, 6, 2, itaque solidum ex Logistica circa axem FO revoluta sesquialterum est Coni ex inscripto, & per tangen-

gentem determinato triangulo FBO. Quod erat demonſtrandum.

3 Hinc nullo negotiò deducitur, rotundum ſolidum à ſpatio poſt AB infinito, ad ſolidum rotundum à ſpatio item infinito poſt aliam ordinatam CV ad invicem eſſe, ut quadrata

BA, CV, quippe & horum ſolidorum ſubſeſquialteræ magnitudines, nempe inſcripti coni, ob eamdem altitudinẽ ſubtangentis, ſunt ad invicem, ut quadrata radiorum baſis; necnon ſolida ex portionibus AVCB, BADQ eſſe ad invicem, ut differentias quadratorum AB, CV, & AB, QD, ſive, ut armillas circulares ab VE, & DK circa BQ revolutis deſcriptas, vel hæc ſolida ad invicem eſſe, ut reſpondentia ſpatia geometricæ ſpiralis, per hujus Logiſticæ convolutionem, axe BC in punctum contracto, provenientia; quæ omnia etiã argumentis *cap.* 3. adductis in demonſtratione primi Theorematis, confirmari potuiſſent, intellectis nimirum loco parallelogrammorum Bz, xz, &c. totidem cylindris, eademque prorſus demonſtratione applicata.

4 Nobis aliam hujus veritatis demonſtrationem meditantibus illud oſtendendum occurrit, quòd ſi intra Logiſticam BCA deſcribatur ad eamdem aſymptoton, eamdemque

or-

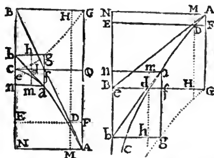
ordinatam F B alia Logiſtica B N M, cujus ordinatæ ſint, ut quadrata prioris Logiſticæ, faciendo nimirum ubique, ut F B ad D C, ita D C ad D N, & ut F B ad E A, ita E A ad E M, &c. Spatium à Logiſtica F B N M comprehenſum ſubduplum erit ſpatii à Logiſtica F B C A comprehenſi; ſumpta enim quavis ordinata D N C, ac poſita E F dupla F D, ordinetur E M A; eſt igitur in priori Logiſtica F B ad D C, ut D C ad E A; ſed etiam ex conſtructione ita D C ad D N ordinatam poſterioris Logiſticæ; æquales ſunt igitur D N, & E A; & hoc ſemper; ordinantur autem E A in ſpatio F B C A ad altitudinem E F ſemper duplam altitudinis F D interceptæ ab æquali ordinata D N in ſpatio F B N M; igitur ex Propoſit. 1. noſtræ Appendicis ad Demonſtr. Vivian. Probl. erit ſpatium F B C A duplum ipſius F B N M. Q. e. d.

5 Colliges ſpatium F B N M æquale eſſe triangulo F B O per tangentem prioris Logiſticæ B O determinato, ſiquidem & hujus duplum eſt, ex Theoremate ſeptimo Hugeniano, idem ſpatium F B C A; necnon evidens eſt, ſubtangentem Logiſticæ poſterioris F B N M fore ſemiſſem ipſius O F, quippe ejus rectangulum in F B æquale foret ſpatio F B N M, uti & prædicto triangulo; imò generaliter, quàm ſubmultiplicata fuerit ratio ipſarum D N, D C, rationis D N, F B, tam ſubmultiplex fore ſpatium à Logiſtica B N M comprehenſum ſpa-

ſpatii comprehenſi ab ipſa BCA, & tam ſubmultiplices pariter fore ſubtangentes hujus, ſubtangentium illius.

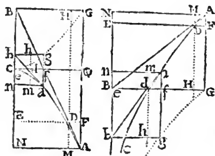
6 Ut altera igitur propoſiti Theorematis demonſtratio compleatur, triangulo OFB ad verticem O inſcriptum eſto trilineum parabolicum ORPBF, cujus ad verticem tangens OF; manifeſtum eſt, Conum ex OBF circa FO proportionaliter analogum eſſe trilineo OPBF, quippe, ut circuli, vel quadrata radiorum BF, ND, ita lineæ BF, DP; quemadmodum & ſpatium FBNM ſupra deſcriptum proportionaliter analogũ eſt ſolido rotundo ex Logiſtica FBCA circa FO, eò quòd circuli, vel quadrata radiorum FB, DC ſint ut lineæ FB, DN; ita erit igitur ſolidum ex FBCA ad Conum ex FBO, quemadmodum ſpatium FBNM, ideſt ex *præced. num.* triangulum FBO, ad trilineum FBPO; nempe in ratione ſeſquialtera. Q. e. d.

7 Duas alias adhuc diverſas ejuſdem Theorematis demonſtrationes afferre poſſem, ſed ne longior ſim, & alteri longè utiliori locum aperiam, hac dumtaxat contentus ero, quam tertio loco ſubjungam, atque ut Lectores patienter attendant enixiùs rogabo. Semen fœcundiſſimum eſt, unde illa pullulat, quippe illi, quod *præc. cap. nu.* 2. ſevimus, atq; unde tot fructus




abundè collegimus, agnatum penitus, atque congeneum eſſe reperies. Sint igitur eædem Correlatæ figuræ, quas loco citato deſcripſimus, gGAaC, & NAaC; utraque autem circa

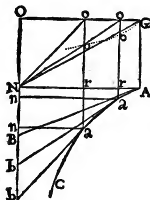
ca axem N B convertatur; ajo ſolidum à ſpatio primo, & exteriori productum duplum eſſe ſolidi à ſecundo, & interiori ſpatio geniti; facta enim eadem, ut priùs, conſtructione, cùm parallelogrammum N F æquale ſit ipſi M G, utroque circa N B revoluto, cylindrus ex primo erit ad tubum cylindricum genitum ex ſecundo, ut dimidia N A (quæ eſt diſtantia centri

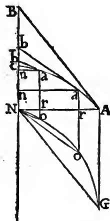



gravitatis ipſius N F ab axe motus) ad mediam arithmeticam inter M N, & A N (quæ eſt diſtantia centri gravitatis M G ab eodem axe) hæc autem media arithmetica in parallelogrammis infinitè exiguæ latitudinis, atque adeò in ipſiſmet ſolidis, in quæ tandem deſinunt tubi illi cylindrici, punctis M, A, coincidentibus, & omni latitudine M A penitus evaneſcente, eſt ipſiſſima linea N A; itaque, cùm idem ratiocinium valeat in omnibus aliis cylindris ex n f, & tubis cylindricis ex m g in tali converſione ſpatiorum genitis, erit ſemper unuſquiſque cylindrus ſolidi ex interiori figura ad quemlibet tubum ſolidi ex figura exteriori, ut dimidia N A ad totam N A, ut dimidia n a ad totam n a, ſemper nimirum in ratione ſubdupla; ſolidum igitur ex interiori figura C a A N eſt ſemiſſis ſolidi ex figura exteriori g G A a C. Quod erat demonſtrandum.

8 Di-

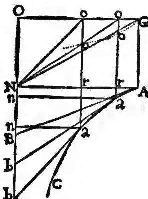
8 Directè autem depressis, aut evectis lineis singulis A G, a g, ut jam non ad ipsam curvam A a C, sed ad basim N A ipsarum extrema pertingant, quemadmodum *cap. præcedenti num.* 3. monuimus non variari figuræ quantitatem, sed eamdem esse figuram N o o G A hinc provenientem, ac quæ




priùs erat g G A a C, ita pariter constat, idem solidum ex ipsa o o G A N circa N B revoluta proventurum, quod priùs ex g G A a C, propter servatam eamdem linearum A G, & O r tum longitudinem, tum distantiam ab axe motus, adeòque easdem cylindricas superficies hæc solida componentes; duplum est igitur solidum ex figura o o G A N, solidi ex C a A N (facta circa N B utriusq; rotatione) descripti; imò & partes partium respondentium, videlicet solidum, quod ex portione N r o, duplum solidi ex C a n (acceptis o r, & n a homologis, scilicet in idem a punctum convenientibus) & quod ex o r A G, duplum ejus, quod ab A a n N, ob eamdem rationem.

9 Tertia igitur propositi Theorematis Hugeniani demonstratio sic expedietur. Esto Logistica A a C. Constat ex dictis *cap. præced. num.* 13. ei Correlatam figuram esse parallelogrammum N A G O, quod si circa axem Logisticæ rotetur



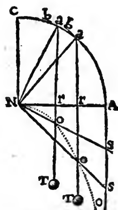

cylindrum producet triplum coni ab inscripto triãgulo N A B ejusdem basis, & paris altitudinis; cùm igitur ex ea, quam hìc adduximus, doctrina solidum ex Logistica circa axem sit subduplum præfati cylindri ex parallelogrammo N A G, erit solidum Logisticæ ad conum illum inscriptum in ratione composita ex subdupla, inter ipsum, & cylindrum intercedente, & ex tripla inter cylindrum, ac dictum conum reperta; Ratio autem ex his composita ( ut ad finem *num.* 2. indicavimus ) est sesquialtera; quare, &c.

10 Sed & hinc pariter constat dimensio portionum ejusdem solidi, putà ejus, quæ à parte n a A N circa n N rotata generatur , quippe quæ demonstretur semissis tubi cylindrici ex correspondente parallelogrammo A r o circa eumdem axem converso geniti, idest æqualis cylindro, basi differentia circulorum A N, N r, altitudine vero semisse subtangentis; indeque subtracto cylindro ab inscripto parallelogrammo n a r, residuũ æquale erit annulo ex spatio trilineari a r A circa axem

re-

revoluto, quod proinde notam rationem habebit, sive ad aliũ annulum a r A, sive ad tubum cylindricum ex parallelogrammo, quod sibi circumscriberetur; & hoc *cap.* 7. *num.* 14. desiderabatur ad spatia quædam trilinearia Spiralis Geometricæ, tum ad invicem, tum ad circumscriptas armillarum circulariũ portiones comparanda, ut ex ibi dictis constat. Calculum ineat qui volet. Nobis colligendi sunt fructus ex doctrina *num.* 7. & 8. indicata uberrimè manantes, imò veriùs Lectoribus indicandi, ne voluptatem illos per se decerpendi eisdem invidisse videamur.

11 In primis igitur in figura quadranti Correlata, *cap. prec. num.* 6. descripta, patet, nedum integrum spatium S A N o O circa N C revolutum, producere solidum æquale sphæræ radio N A descriptæ, quippe duplum hemisphaerii ex conversione quadrantis C A N; sed & quarum sphæræ portionum

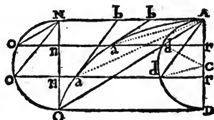



duplæ sint portiones ejusdem solidi à partibus concavis N o r descriptæ, ac consequenter cui solido æquales conoides à convexis etiam portionibus, curva N o, & axe C N producto interceptis, ordinataque ex o ipsi r N parallela terminatis, & circa eumdem axem conversis, & tam facile erit, sive ali-

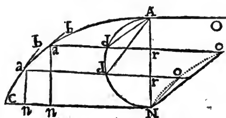
 quod

quod ex hujusmodi conoidibus, sive ex solidis à spatio cõcavo descriptis in data ratione dividere, quã facile est in sphæræ portionibus, & residuis cylĩdrorũ illas circũscribentiũ idẽ præstare.

12 Cycloide O a A N circa tangentem verticis A N revoluta, patet solidum inde proveniens esse subduplum annuli ex



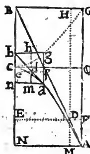

semicirculo N o O circa eamdem tangentem converso: unde & residuum cylindri illi solido circumscripti, ideſt solidum, quod ex semicycloide convexa O a A D circa tangentem verticis conversa describitur, notæ dimensionis erit, imò & ejus partium mensura innotescet: quæ jam pridem inter Geometras magna sollicitudine quæsita fuisse video. Idem in Cissoide præstandum, cujus quidem ex nota proprietate linearum




A r, r d, r N, r o proportionalium, obvia est dimensio solidi

di ejus conversione circa asymptoton AO descripti, quippe uti rectangula Aro, drN æqualia inde ostenduntur, adeoque & cylindricæ superficies ab iis descriptæ, ita integrum illud Cissoidale solidum, integro annulo ex semicirculo genitore circa tangentem in N revoluto, & partes partibus correspondentibus æquari manifestum est; ex nostra verò doctrina manifesta etiam evadit dimensio solidi ex eodem cavo cissoidali spatio ooNAO circa Nn revoluto, ejusque partium, per comparationem ad fusum Cycloidale ex CAN, ejusque partes; imò & innotescet dimensio Conoidum ex spatiis convexis, curva Noo, & axe nN producto, ac ordinata ex o ipsi rN parallela terminatis, quippe residua cylindrorum ex rectangulis Nro productorum. Solidum ex Tractoria subduplũ pariter invenies hemisphærii ex quadrãte sibi correlato, &c.

13 In parabolis cujusvis generis CaA, Conoides ex figura CAN circa axem CN habebit semper ad circumscriptum cylindrum ex C☉NA rationem notam; nota quippe est ratio axis NC ad subtangentem NB, unde




& ratio cylindri ex C☉NA ad cylindrum ex BGAN, quæ eadem est; cylindrus autem BGAN componitur ex solido ex CgGAN (quod semper est triplum Conoidis ex CAN, quippe solidum ex CaAGg hujus semper est duplum) & ex conoide ex CgGB, cujus ratio ad ipsum

ſum C A N eadem ſemper eſt, quæ C B ad C N, c b ad c n, juxta Propoſit. 1. Append. noſtræ Vivian. Probl. adeòque eſt ad illum in quadratica, ut 1 ad 1. in cubica, ut 2 ad 1. in quadratoquadratica, ut 3 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum ſunt, ut quadrata ex ſagittis, ut 1 ad 2, & univerſaliter ſi ordinatarum exponens ſit $x$, partium verò axis $y$, ut $x$ minùs $y$ ad $y$; itaque ſemper cylindrus ex B G A N erit ad conoidem ex parabola C A N circa axem revoluta, ut $3y + x - y$ ad $y$; ſcilicet in quadratica, ut 4 ad 1. in cubica, ut 5 ad 1. in ſequenti, ut 6 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum reſpondent quadratis ſagittarum, ut 7 ad 2. in qua verò quadratoquadrata reſpondent cubis, ut 10 ad 3, &c. Vel ſic etiam calculus inſtitui poteſt;

quoniam cylindrus ex B G A N triplus eſt coni ex triangulo B A N; ſolidum item ex C g G A N triplum Conoidis C A N; reliqua etiam conois ex C g G B tripla erit ſolidi ex trilineo C A B; eſt verò, ex dictis, Conois C A N ad Conoidem C g G B convertendo, ut $y$ ad $x - y$; ergo ex æquo Conois C A N ad ſolidum ex trilineo C A B eſt, ut $y$ ad $\frac{x-y}{3}$ ſive, ut $3y$ ad $x - y$; & componendo, ac per converſionem rationis, conus B A N ad conoidem ex inſcripta parabola, ut $2y + x$ ad $3y$; nempe in quadratica, ut 4 ad 3, in cubi-

bica, ut 5 ad 3, in quadratoquadratica, ut 6 ad 3, in ea, in qua cubi comparantur quadratis, ut 7 ad 6, &c.

14 Non difficilior infinitarum hyperbolarum tractatio erit. Sit quævis hyperbola C a A inter asymptotos B D Φ; & huic correlata figura g G, cujus ordinatæ A G, a g æquales subtangentibus N B, n b. Quoniam ex dictis *cap. 7. num. 9.* est

D N ad N B, seu Φ A ad A G perpetuò, ut exponens ordinatarum A Φ ad exponentem distantiarum Φ D, videlicet, ut $x$ ad $y$; etiam solidum ex spatio C a A Φ D circa D B ad solidum ex g G A a C circa eumdem axem, (quippe quorum cylindricæ superficies à lineis Φ A, A G, & f a, a g eamdem perpetuò rationem observant) ut $x$ ad $y$; unde idem antecedens solidum, ad solidum ex C a A N, quod est juxta nostram doctrinam, solidi consequentis subduplum, erit ut $x$ ad $\frac{1}{2}y$; vel ut $2x$ ad $y$; & dividendo, cylindrus ex inscripto parallelogrammo Φ A N D ad solidum ex spatio infinitè longo C a A N erit, ut $2x - y$ ad $y$; scilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 1 (uti jam Torricellius ostendit) in secunda, seu quadratica, ut 3 ad 1, in tertia, seu cubica, ut 5 ad 1, in quarta, seu quadratoquadratica, ut 7

ad

ad 1; & sic semper, sumpto antecedente juxta imparium numerorum progressionem; quod si cubi ordinatarum ad distantiarum quadrata comparentur, ratio invenietur, ut 4 ad 2, seu 2 ad 1; si quadratoquadrata illarum ad istarum cubos, ut 5 ad 3, &c. Alia exempla, aliæque speculationes non deerunt, si Lectoris industria hisce vestigiis insistens in feracissimos Geometriæ campos se conferet.



# CAPUT X.

*Decimum Theorema proponitur, ac prima demonstratione stabilitur. Infinita series terminorum proportionalium æquatur maximo ducto in exponentem rationis, ac diviso per eundem exponentem unitate minutum. Ex hoc demonstrandi modo, tum finitæ, tum infinitæ series æquales ostenduntur summæ, vel differentiæ duarum potestatum, per summam, vel differentiam radicum divisæ, &c. Solidum rotundum, de quo in hoc Theoremate, per infinitæ seriei calculum ad mensuram redigitur. Subtangentes Logisticæ in ordinata acceptæ sunt, ut rectangula Logisticæ inscripta. Solidum ex quovis Logisticæ spatio circa ordinatam revoluto ad inscriptum cylindrum est, ut congruum trilineum ad inscriptum triangulum. Hæc ratio nota esse ostenditur. Annulis quoque latis per hæc spatia progenitis demonstratio applicabilis esse indicatur.*

De-

M a

1 DEcimum Auctoris nostri Theorema inven a, fateor, difficillimum mihi fuit, duas tamen, aspirante Geometriæ Præside, ejus demonstrationes, eo, quod sequitur, medio tandem extundere potui: *Solidum*, inquit, *productum ab eodem infinito spatio in conversione circa ordinatam B F, post quam exporrigitur, sextuplum est Coni geniti ex triangulo B F O in conversione circa B F*. Fiat enim angulus E F H semirectus, & ordinatæ N D, M E in Logistica extendantur ad lineam F H in G, H. Concipiatur modò solidum ex triangulo H F E, (ad partes H E indefinitè protenso simul cum Logistica) in spatium Logisticæ F B M E, quod conflabitur ex totidem rectangulis G D N, H E M, &c. Aut etiam, ut in Vivianeis indicavimus ad Schol. propos. 6. pag. 51. Spatium Logisticum F B N M ita erectum, ut perpendiculare fiat plano H F E, per quod motu sibi semper parallelo fluere intelligatur, ut partes ipsius Logisticæ lineam F H prætergredientes deinceps evanescant, itaut, cùm Logistica attigerit punctum G, ejus portio F D N B defæcerit, solaque remanserit residua post D N versùs E M in infinitum protensa, ubi verò attigerit punctum H, defæcerit pars E F B M, solaque re-

ſidua fue[illegible]æ poſt E M in infinitum extenditur, &c. Jam conſt[illegible] [illegible]na geneſi, hoc ſolidum fore ad rotundum ex Logiſt[illegible] ordinatam B F revoluta, ut radius cujuſpiam circ[illegible]jus circumferentiam; quæ enim lineæ D N, E M in [illegible] ſupra deſcripto ducerentur in G D, H E, æquales ipſis D F, E F, in rotundo ſolido circa F B ducerentur in peripherias ab eiſdem radiis D F, E F, deſcriptas in rotatione earumdem ordinatarum D N, E M. Rurſus ex ſecunda geneſi ejuſdem priùs deſcripti ſolidi, patet illud fore æquale

priſmati altitudine ſubtangentis O F, baſi verò integro Logiſticæ ſpatio F B N M, ideſt, per dicta *cap.* 8. in demonſtratione Theorematis ſeptimi, baſi ipſo rectangulo O F B. Ratio eſt, quia ſolidum illud, juxta ſecundam geneſim conſideratum, habet pro baſi ſpatium F B M, & ad punctum G, ſive ad altitudinem G D habet ſectionem baſi parallelam ſpatium infinitum poſt D N extenſum, ſicut & ad altitudinem E H ſpatium infinitum extenſum poſt E M, &c. quemadmodum & priſma, baſi ſpatio F B N M, altitudine O F, ſecari poſſet in rectangulum, O F B æquale ipſi F B M, & ad diſtantiam F D (æqualem D G) ſecaretur in rectangulum ex O F in D N æquale ſpatio infinito poſt D N, necnon & ad diſtantiam E F

(æqua-

(æqualem EH) in rectangulum ex OF in EM æquale spatio post EM infinitè protenso; &c.

2 Ratio igitur solidi rotundi ex spatio FBME circa FB rotati ad conum ex triangulo OBF, utpote composita ex ratione dicti solidi rotundi ad prisma altitudine OF, basi spatio FBM, vel rectangulo OFB, & ex ratione hujus ipsius prismatis ad dictum conum, componetur ex ratione circumferentiæ radii OF ad radium OF, (vel, assumpta communi altitudine OC, dicas ex ratione cylindricæ superficiei descriptæ ab OC ad rectangulum FOC) & ex ratione dicti prismatis ad designatum conum (scilicet ex composita rursus ex ratione rectanguli FOC ad triangulum FOB, & ex OF altitudine prismatis ad circumferentiam ex triente OF, quæ est distantia centri gravitatis trianguli ejusdem ab axe motus, juxta celeberrimam regulam Guldinianam, seu dicas ex ratione trianguli ejusdem OFB ad triangulum ex triente circumferentiæ ab OF descriptæ in ipsam OF, vel OC) hæ autem rationes componunt rationem sextuplam; cylindrica siquidem superficies ab OC in conversione circa FB descripta (quæ est primus terminus) cùm tripla sit cylindricæ superficiei ejusdem altitudinis in trientem dumtaxat peripheriæ ex OF, sive in peripheriam trientis OF, sextupla erit trianguli ex tali triente circumferentiæ in OC, vel FB (quod est ultimus terminus) utpote subdupli cylindricæ superficiei ejusdem altitudinis, & basis. Solidum igitur rotundum ex Logisticæ spatio FBM circa FB revoluto, sextuplum est Coni ex OFB triangulo inscripto circa eamdem ordinatam rotato. Quod erat demonstrandum.

3 Alia ejusdem Theorematis demonstratio assumptum hoc, jam inter Geometras pervulgatum, præsupponit, quòd scilicet quælibet infinita series terminorum continuè proportionalium æqualis est maximo termino ducto in exponentem rationis, & diviso per eumdem exponentem unitate minutum; sit verbigratia communis ratio infinitorum terminorum illa, quam habet *a* ad 1; sitque maximus terminus *m*; erunt igitur termini isti per ordinem

$m, \frac{m}{a}, \frac{m}{aa}, \frac{m}{e^3}, \frac{m}{e^4}$, &c. in infinitum: dico omnes ſimul æquari $\frac{ma}{a-1}$; multiplicentur enim ſinguli ex propoſitis terminis per $a-1$: fiet $ma-m, +m-\frac{m}{a}, +\frac{m}{a}-\frac{m}{aa}, +\frac{m}{aa}-\frac{m}{a^3}$, &c. ubi conſtat, omnes terminos poſt $ma$ ſe mutuò elidere, qui enim priùs negantur, iidem immediatè poſt affirmantur; atque adeò omnes æquantur ſoli priori producto $ma$; igitur è contra dividendo per $a-1$, fient $m+\frac{m}{a}, +\frac{m}{aa}+\frac{m}{a^3}+\frac{m}{a^4}$, &c. in infinitum æquales $\frac{ma}{a-1}$ quod enim multiplicatio conficit, hoc ipſum diviſio retexit. Vel ſic: In propoſitis terminis proportionalibus, ut una differentia ad unum terminum (putà ut $a-1$ ad $a$) ita omnes ſimul differentiæ (ideſt ipſe maximus terminus $m$, in quo differentiæ omnes includuntur) ad omnes terminos, qui proptereà æquales eſſe debent $\frac{ma}{a-1}$. Q. e. d.

4 Priorem demonſtrandi modum, qui clarior eſt, atq; me judice, omnium facillimus, indicavi jam in Vivianeis ad finē pag. 150. atque expeditiſſimum innumeris veritatibus demonſtrandis Lector inveniet, ſi in illo ſemet tantiſper exercere non dedignetur. Exempli cauſa in ſeriebus finitis, deprehendet differentiam quarumlibet homogenearum poteſtatum, diviſam per differentiam radicum earumdem, æquari aggregato tot terminorū continuè proportionaliū, uno gradu depreſſiorū, quot fuerint unitates in earum poteſtatum exponente; putà

$$\frac{aa-bb}{a-b} = a+b$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = aa+ab+bb$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b} = a^3+aab+abb+b^3$$

&c. mul-

multiplicando enim per $a - b$ terminos primæ æquationis, fit $aa - ab + ab - bb = aa - bb$, ob reliquos terminos se mutuò elidentes; item multiplicando terminos æquationis secundæ, habetur $a^3 - baa + baa - abb + abb - b^3 = a^3 - b^3$ ob eamdem rationem; similiter in aliis idem eveniet. Differentiam autem quarũlibet homogenearum potestatum gradus à numero pari denominati, vel summam gradus denominati ab impari numero, divisam per summam radicum, æqualem deprehendes aggregato similium terminorum, ut supra, sed alternatis affirmationis, & negationis signis: verbi gratia

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = aa - ab + bb$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - aab + abb - b^3$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3 b + aabb - ab^3 + b^4$$

&c.

Nam multiplicando terminos per denominatorem $a + b$ fit in prima æquatione $aa + ba - ba - bb = a^2 - b^2$, in secunda æquatione fit $a^3 + baa - aab - abb + bba + b^3 = a^3 + b^3$ cæteris se elidentibus; in tertia, & quarta, aliisque infinitis idem proveniet.

5 In seriebus autem infinitis: proponatur summa quarumvis potestatum divisa per differentiam radicum; dico æquari tot terminis uno gradu depressioribus, & continuè proportionalibus, quotus est potestatum gradus, cum dupla serie infinitarum fractionum similiter proportionalium, pu-

putà $\frac{aa+bb}{a-b} = a + b + \frac{2bb}{a} + \frac{2b^3}{aa} + \frac{2b^4}{a^3}$ &c.

Hos quippe multiplicando per $a - b$, habes

$$aa - ba + ba - bb + 2bb - \frac{2b^3}{a} + \frac{2b^3}{a} - \frac{2b^4}{aa} + \frac{2b^4}{aa} \text{ \&c.}$$

ubi, retractis iis, qui se elidunt, remanet $aa + bb$ Similiter,

$$\frac{a^3+b^3}{a-b} = aa + ab + bb + \frac{2b^3}{a} + \frac{2b^4}{aa} + \frac{2b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

hos enim multiplicando per $a - b$ fiet

$$a^3 - baa + baa - abb + abb - b^3 + 2b^3 - \frac{2b^4}{a} + \frac{2b^4}{a} \text{ \&c.}$$

ubi, remotis contradictoriè oppositis, habetur $a^3 + b^3$ &c. Idem ferè contingit, ubi potestatum paris gradus summa, vel imparis gradus differentia dividitur per summam radicum; nisi quòd signa tunc sunt alternanda; ut

$$\frac{aa+bb}{a+b} = a - b + \frac{2bb}{a} - \frac{2b^3}{aa} + \frac{2b^4}{a^3} \text{ \&c. in infinitum.}$$

$$\frac{a^3-b^3}{a+b} = aa - ab + bb - \frac{2b^3}{a} + \frac{2b^4}{aa} - \frac{2b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^4+b^4}{a+b} = a^3 - aab + abb - b^4 + \frac{2b^4}{a} - \frac{2b^5}{aa} \text{ \&c.}$$

Sic etiam

$$\frac{aa}{a \pm b} = a \mp b + \frac{bb}{a} \mp \frac{b^3}{aa} + \frac{b^4}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^3}{a \pm b} = aa \mp ab + bb \mp \frac{b^3}{a} + \frac{b^4}{aa} \mp \frac{b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

Non

Non dissimili ratiocinio demonstrare soleo extractionem radicis Neutoniano modo per series infinitas. Putà $\sqrt{aa + xx}$ (quæ est expressio generalis ordinatarum ad rectum hyperbolæ latus, existente $a$ semitransverso, & $x$ distantia à centro) vel $\sqrt{aa - xx}$ (quæ exprimit ordinatam quadrantis circuli, cujus radius $a$, distantia ordinatæ à centro $x$) sic enim series ordinari solet

$$a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{3x^6}{48a^5} - \frac{15x^8}{384a^7} \pm \frac{105x^{10}}{3840a^9} \text{ \&c.}$$

ubi signum $\pm$ valet $+$ in hyperbola, $-$ in circulo, numeri autem, qui post tertium terminum afficiunt numeratores, sunt per ordinem $3 .\ 3 \times 5 .\ 3 \times 5 \times 7$. &c. qui verò afficiunt denominatores, incipiendo à secundo termino, sunt $2 .\ 2 \times 4 .\ 2 \times 4 \times 6 .\ 2 \times 4 \times 6 \times 8$. &c. orti scilicet, illi quidem ex mutua multiplicatione omnium imparium, hi verò ex multiplicatione mutua omnium parium numerorum per ordinem dispositorum.

Demonstratur, inquam, id ita esse, quia si illa series ducatur in se ipsam, singulis ejus terminis in singulos multiplicatis, orietur nil aliud, quàm $aa \pm xx$, adeòque est legitima radix ejusdem: nam ducatur illa series

in $a$ fiet $aa \pm \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{8aa} \pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

in $\pm \frac{xx}{2a}$ fiet $\pm \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{4aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

in $- \frac{x^4}{8a^3}$ fiet $- \frac{x^4}{8aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

in $\pm \frac{3x^6}{48a^5}$ fiet $\pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

&c.

Summa erit $aa \pm xx \quad 0 \quad 0$ &c.

6 Ad

6 Ad propositum nostrum redeuntes, doctrinam *num*.3. adductam, alteri Theorematis decimi demonstrationi sic applicabimus: esto Logistica BVI, tangens ad B ipsa BO, subtangens OF, cujus particula infinitè parva FQ accepta, circumscribantur æqualis latitudinis parallelogramma FM, QR, PS, &c. Spatium Logisticæ ita stringentia, ut solidum ab ipsa circa FB rotata productum ferè coincidat cum aggregato solidorum à talibus parallelogrammis in eadem rotatione descriptorum, quorum primus cylindrus ex FM, secundus, tertius, & alii deinceps totidem cylindrici tubi ex parallelogrammis QR, PS, &c. à quibus certè deficere potest illud rotundum Logisticæ solidum minori defectu quolibet dato, & ratio, quam de illorum aggregato ad conum ex FOB comparato concludemus, eadem de ipsomet Logisticæ solido demonstrata esse intelligetur. Subtangens igitur FO vocetur *a*, & FQ infinitè parva *d*; OQ autem pro unitate 1 designetur, ipsa FB per *b* denominata; cùm sit igitur (ob indefinitam ipsius FQ parvitatem, & punctum N curvæ cum tangente OB coincidens) FO ad OQ, scilicet *a* ad 1, ut

BF

BF seu $b$ ad QN, hæc exprimenda erit per $\frac{b}{a}$; & reliquæ lineæ PV, TI, &c. in quibus eadem proportio (ex curvæ natura) continuatur, eò quòd paribus intervallis sint dissitæ, erunt per ordinem $\frac{b}{aa}$, $\frac{b}{a^3}$, $\frac{b}{a^4}$, &c. in infinitum; altitudines igitur prædictorum solidorum conflabunt hanc geometricam seriem $b$, $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{aa}$, $\frac{b}{a^3}$, $\frac{b}{a^4}$, &c. bases autem eorumdem in ratione quadrati primi radii FQ, & mox differentiæ quadrati FP ab FQ, & quadrati FT ab FP, &c. nempe, ut $dd$, $3\,dd$, $5\,dd$, $7\,dd$, eò quòd differentiæ quadratorum à lateribus arithmeticè proportionalibus sint, ut impares numeri; hac igitur serie per illam multiplicata prodibit series ipsorū per ordinem solidorum $ddb$, $\frac{3ddb}{a}$, $\frac{5ddb}{aa}$, $\frac{7dbb}{a^3}$, &c. quam quidem resolvere potes in has numero infinitas, prefixis majusculis litteris subnotatas,

| | |
|---|---|
| A | $ddb + \frac{ddb}{a} + \frac{ddb}{aa} + \frac{ddb}{a^3} + \frac{ddb}{a^4}$, &c. |
| B | $\frac{2\,ddb}{a} + \frac{2\,ddb}{aa} + \frac{2\,ddb}{a^3} + \frac{2\,dbb}{a^4}$, &c. |
| C | $\frac{2\,ddb}{aa} + \frac{2\,ddb}{a^3} + \frac{2\,dbb}{a^4}$, &c. |
| D | $\frac{2\,ddb}{a^3} + \frac{2\,ddb}{a^4}$, &c. |
| E | $\frac{2\,ddb}{a^4}$, &c. |

quarū summa $ddb + \frac{3ddb}{a} + \frac{5ddb}{aa} + \frac{7ddb}{a^3} + \frac{9ddb}{a^4}$, &c. eadē, ut constat, quæ priùs.

7 Sunt verò præscriptæ series terminorum proportionalium, quorum exponens commune $a$; si igitur maximi earũ termini ducantur in $a$, & productũ dividatur per $a - 1$ (quod hìc juxta constructionem est quantitas $d$ infinitè parva) habebuntur termini iis infinitis seriebus æquales: putà series A æquatur $dba$; series B æquatur $2\,db$; series C æquatur $\frac{2\,db}{a}$ series D æquatur $\frac{2\,db}{aa}$, & sic deinceps; series igitur illorum solidorum æquabitur progressionibus duabus

$$dba + db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

$$db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

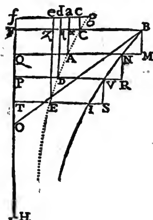
quippe harum summa terminis nuper collectis æquatur

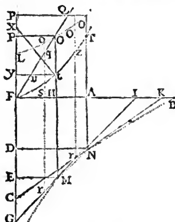
$$dba + 2\,db + \frac{2\,db}{a} + \frac{2\,db}{aa} + \frac{2\,db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

prima autem harum serierum (facta eadem multiplicatione) æqualis est $baa$; secunda verò æqualis $ba$ (sive, ut æquè multæ utrobique appareant dimensiones, addita hinc unitate, dicas $ba1$) est verò unitas QO, *fig.* 1. *seq.*, ferè = OF, idest $a$, quippe à qua deficit differentia FQ infinitè parva, igitur pro $ba1$ accipi poterit iterum $baa$; atque adeò series dictorum solidorum, seu ipsum rotundum solidum Logisticæ, de quo loquimur in hoc Theoremate, optimè exprimetur per $2\,baa$; Conus autem ex triangulo BOF, utpotè æqualis trienti cylindri circumscripti [pro circulo accepto radii quadrato, ut in solidorum serie factum est, quod in idem recidit, ob proportionalitatem servatam] exprimendus erit per $\frac{1}{3}\,baa$; solidum igitur Logisticæ ad inscriptum Conum erit, ut $2\,baa$ ad $\frac{1}{3}\,baa$, sive ut 2 ad $\frac{1}{3}$, vel ut 6 ad 1. Q. e. d.

8 Nisi hic demonstrandi modus plenè satisfecerit, prima ostensione contentus, secundæ saltem conatum lauda, ac mecum progredere ad dimetiendas ejusdem solidi portiones, à partibus videlicet per binas ordinatas resectis, & circa ma-

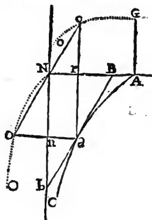
majorem ipſarum revolutis progenitas; idque diverſa rurſus à præcedentibus methodo: eſto, *fig.* 2., Logiſtica B N M, cujus ad puncta N, M tangentes N C, M G occurrant aſymptoto quidem F G in punctis C, G, ordinatæ verò B F in




punctis K, I, & coordinentur N D, N A, M E, M H; dico A K ad H I (ſubtangentes ſcilicet in ordinata, non in aſymptoto acceptas) eſſe ad invicẽ, ut ſunt rectangula A N D, H M E; ratio enim A K ad H I componitur ex A K ad A N [ſeu D N ad ſubtangentem D C, vel E G] A N ad M H, & M H ad A I (ideſt ſubtangentis E G ad E M) ergo & componitur ex D N ad E M, & A N ad M H; ex his autem conflatur ratio rectanguli A N D ad H M E; itaque conſtat propoſitum. Breviùs ſic: ob proportionales lineas G E, E M, M H, H I, eſt rectangulum ex G E, aſymptoti ſubtangente, in H I, ſubtangentem ordinatæ, æquale inſcripto rectangulo E M H; ſimiliter C D in A K æquabitur D N A; ergo, ut rectangula ſubtãgentium aſymptoti in ſubtangentes ordinatæ (hoc eſt ipſæ ſubtangentes in ordinata, cùm quæ in aſymptoto ſint æquales) ita erunt rectangula Logiſticæ inſcripta.

9 Concipiamus jam Logisticam esse A a C, cujus ordinata A N, asymptotos N b, tangens ad quodvis punctum a ipsa a B, conveniens cum ordinata in B; ac mota regula N o per punctum N, ita ut perpetuò parallela existat tangenti,

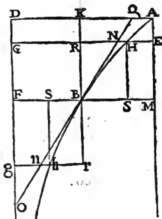



occurrat verò ordinatæ productæ a n ad puncta o O, perficiatur figura N o O ad communem axem N b posita, quæ ex dictis *cap.* 8. *num.* 4. & 5. erit ipsi Logisticæ Correlata, ejusque spatia o N n respectivè semper æqualia spatiis a A r: singulæ autem lineæ o n æquales erunt subtangentibus r B, in ordinata acceptis; sed hæ proportionantur rectangulis n a r, inscriptis Logisticæ spatio, vel etiam superficiebus cylindricis per illorum conversionem circa N A descriptis; erunt igitur lineæ ordinatæ in figura O N n, ipsi o n parallelæ, ut concentricæ superficies cylindricæ in solido rotundo ex n a A N, circa A N revoluto, productæ à singulis ordinatis n a per eadem puncta n transeuntibus; igitur omnes lineæ figuræ o n N ad totidem æquales extremæ o n [ sive ipsa figura o n N, aut trilineum a A r illi æquale ad rectangulum N n o, vel a r B ] erunt, ut omnes cylindricæ superficies in dicto solido, ex portione n a N revoluta genito, ad totidem æquales extremæ à li-

nea

nea n a generatæ (ideſt ut ipſummet ſolidum rotundum ad ſolidum, quod gineretur ab hyperbola per a aſymptotis n N A inſcripta, & circa N A revoluta, quippe in illo omnes cylindricæ ſuperficies concentricæ æquales forent ei, quæ ab n a deſcribitur, propter ſingula inſcripta parallelogramma ipſi n a r æqualia) & ſumendo conſequentium ſemiſſes, erit trilineum a r A ad inſcriptum triangulum a r B, ut ſolidum rotundum ex n a A N circa A N, ad inſcriptum cylindrum ex parallelogrammo n a r N revoluto productum.

10 Nota autem eſt ratio trilinei ad inſcriptum triangulum, quippe aſſumpta figura *cap.* 7. *num.* 2. adhibita, conſtat, trilineum B K A æquari rectangulo ſubtangentis O F in Q A, triangulum verò B K Q æquatur rectangulo ex B K in




ſemiſſem K Q; propterea ratio trilinei ad triangulum componetur ex O F ad B K (vel D K ad K Q) & ex Q A ad ſemiſſem K Q (vel dupla Q A ad K Q) ideſt erit, ut duplum rectangulum ex D K in Q A ad quadratum K Q; nota igitur ſimiliter erit ratio ſolidi rotundi ex ſpatio Logiſticæ duabus ordinatis intercepto, & circa majorem revoluto

ad

ad cylindrum inſcriptum, ab inſcripto ſcilicet parallelogrammo in eadem converſione progenitum, eadem ſemper, quæ præfati rectanguli ad dictum quadratum. Tubos verò, ſeu annulos ex ejuſmodi ſpatiis circa ordinatam à majori remo-

tiorem revolutis, putà ex G H B F circa A D rotato, progenitos, eadem aſſumpta ſuperioris numeri figura, eodemque argumento facilè ad menſuram vocabis, ſimilia veſtigia premendo.

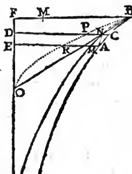
CA-

# CAPUT XI.

*Propositio, & demonstratio Undecimi Theorematis circa distantiam centri gravitatis Logisticæ ab ordinata. Solida infinitorum Logisticæ spatiorum circa ordinatas sunt, ut eædem ordinatæ. Centrum gravitatis quomodo distet ab alterutra ordinatarum in spatiis determinatis Logisticæ. Solida ex his spatiis circa quamvis ordinatam revolutis. Datum solidum in data ratione dividere, &c. Propositio, ac prima demonstratio Theorematis XII. circa distantiam centri gravitatis Logisticæ ab axe. In Correlatis figuris distantia centri gravitatis interioris subdupla est similis distantiæ exterioris. Talis distantia in figura Correlata quadrantis circuli est sesquitertia basis quadraticis. Centrum gravitatis trilinei Cycloidis distat à verticis tangente per semissem radii. Distantia centri gravitatis semicycloidis, & ejus trilinei à basi, & vertice; necnon solida ab iis descripta. Cissoidalis spatii centrum gravitatis, in qua ab asymptoto distantia; ejus solida, atque hinc ratio fusi cycloidalis ad cylindrum. Figuræ, quæ Logisticæ ad axem correlata est, distantia centri gravitatis ab ordinata. Similis distantia in harum, & generaliter omnium Correlatarum figurarum complexo. Secunda demonstratio Duodecimi Theorematis, & extensio ad inventionem centri, in quibusvis Logisticæ portionibus, ad solida, ex iis circa quamvis lineam rotandis determinanda, utilem.*

Jam

IAm ad centra gravitatis, tum ſpatii ſuperficialis Logiſticæ, tum ſolidorum ipſius determinanda procedit Hugenius; ait enim Theoremate Undecimo: *Ex hac ſolidorum menſura ſequitur, quòd centrum gravitatis infiniti ſpatii poſt unam ordinatarum diſtat ab hac ordinata longitudine ſubtangentis;* quod ſic breviter demonſtratur: rotunda ſolida rationem habent compoſitam ex rationibus figurarum genitricum, & diſtantiarum centri gravitatis earumdem ab axe motus, ex pervulgata jam regula Guldini, cui neſcio an præluſerit Pappus ad finem ſuæ præfationis in *lib.7, mathem. collect.* Solidum igitur ex Logiſtica B C A circa B F ad conum ex inſcripto triãgulo O B F




circa eamdem revoluto eſt in compoſita ratione ex ſpatio Logiſticæ F B C A ad triangulum O B F (quæ per Theorema 7. *cap.* 8. demonſtratum eſt ratio dupla) & ex diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſtici ab ipſa F B ad diſtantiam centri gravitatis trianguli, quæ, ut notum eſt, æquaretur trienti ipſius O F; ſed hæc eadem ſolida ex dictis *cap. præced.* ſunt ad invicem in ratione ſextupla, ideſt in compoſita ex dupla, & tripla; oportet ergo diſtantiam centri gravitatis ſpatii Logiſtici ab ipſa F B eſſe triplam diſtantiæ centri gravitatis trianguli ab

ab eadem F B; ergo oportet talem diſtantiam eſſe ipſammet ſubtangentem O F, cujus triens diſtantiam centri gravitatis trianguli, ut diximus, determinat. Patet ergo propoſitum.

2 Hinc habetur, cujuſvis infiniti ſpatii Logiſticæ B A V Q, vel C V F Q, diſtantiam centri gravitatis ab extrema ordinata eamdem ſemper eſſe, quippe æqualem communi ſubtangenti: unde efficitur, ſolida ex primo ſpatio circa B A, & ex ſecundo circa C V, eſſe ad invicem, ut ipſamet ſpatia, ex quibus gignuntur, ob æqualem utrinque centri gravitatis diſtantiam, ſeu eſſe ad invicem, ut ipſæ ordinatæ B A, C V talibus ſpatiis proportionales, ex dictis *cap.* 3. *num.* 7. id quod vel exinde patet, quòd talium ſolidorum ſubſexcupla, nempe coni ab inſcriptis triangulis A O B, C V Q, ob circulos æqualium radiorum B O, C Q ſunt, ut altitudines B A, C V, circa quas convertuntur.

3 Hinc etiam patet, determinato quovis ſpatio B A V C duabus ordinatis interjecto, aſſignari poſſe diſtantiam ejus centri gravitatis ab alterutra ordinatarum. Ducatur enim tangens A O, itaque in O eſt centrum æquilibrii totius ſpa-

tii B A V Q compositi ex proposito B A V C, & ex reliquo C V F Q; sed reliqui C V F Q habetur centrum gravitatis, ducta tangente Q V, in ordinata ex puncto Q, distans videlicet ab æquilibrii centro O per Q O æqualem altitudini

C B propositi spatii ( ut patet, æqualibus subtangentibus C Q, B O, communem subtrahendo, vel addendo quantitatem C O) si igitur fiat, ut spatium B A V C ad reliquum C V F Q, nempe ex Theoremate Tertio, quod *cap.* 4. *num.* 5. & *cap.* 3. *nu.* 8. demonstravimus, ut differentia ordinatarum A B, C V ad ipsam C V, ita Q O, vel B C, ad O E, erit in E D centrum gravitatis propositi spatii C V A B, distans ab A B per E B, & à C V per E C; constat ergo propositum.

4 Dabuntur itaque solida ex quavis Logisticæ portione A V C B, nedum conversa circa majorem ordinatarum B A, sed & circa minorem C V, quippe ad invicem in ratione E B ad E C; & annuli ex variis spatiis E D V C, & C V F G, circa eamdem, vel diversas ordinatas revolutis, notam dimensionem, & proportionem habebunt, quippe in composita eorumdem spatiorum, distantiarumq; ab axe sui motus ratione;

Qui-

Quibus facilè erit, dato ſolido ex dato ſpatio circa axem datũ revoluto, aliud ex alio item ſpatio dato circa aliam quamdam ordinatam majorem, minoremve revolvendo producendum reperire, priori ſolido, vel æquale, vel in data ad ipſum ratione; item quodvis ex talibus ſolidis per concentricas ſuperficies in data ratione dividere, &c.

5 Jam ad Duodecimum Theorema Hugenii gradum faciamus, in quo aſſerit: *Idem centrum gravitatis diſtare ab aſymptoto per quadrantem ordinatæ*; Similiter enim ratio ſolidi ex B C A Logiſtica circa axem F O, ad conum ex triangulo O B F circa eumdem axem, cùm ſit ex Theoremate, & *cap. 9.* ratio

F M B D P N C E R M A O

ſeſquialtera, componetur utique ex dupla, & ſubſeſquitertia, ut patet in numeris 6, 3, 4; componitur autem & ex ratione ſpatii F B C A ad triangulum F B O (quæ eſt ratio dupla) unà cum ratione diſtantiæ centri gravitatis ſpatii F B C A ad diſtantiam ſimilis centri trianguli F B O ab eodẽ axe motus F O; oportet igitur, quòd diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſticæ ab axe ſit ſubſeſquitertia diſtantiæ centri gravitatis trianguli, nempè ſubſeſquitertia trientis ipſius F B, adeòque quòd ſit æqualis quadranti ipſius F B, ut in hoc Theorem. proponitur, ſic enim erit ad diſtantiam centri gravitatis trianguli, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{3}$ ideſt prorſus, ut 3 ad 4. Q. e. d.

6 Eadem veritas, ut ſecundò demonſtretur, imò & ad diſtantiam centri gravitatis partium Logiſticæ extendatur, uberrimum illum fontem Correlatarum figurarum, unde bis jam hauſimus, in *cap.* ſcilicet 8. & 9. tertiò iterum repetam, neque enim venam idcircò exhauriendam putes, Mi Lector.

Audi igitur. In Correlatis quibuſcumq; figuris C A N, & g G A a C, aut C A N, G o o N, diſtantia gravitatis centri primæ figuræ interioris C A N ab axe N B, ſemper ſubdupla eſt diſtantiæ ſimilis centri alterius figuræ g G A a C, vel

A G

A G o o N ab eodem axe; cùm enim æquales ſint hæ figuræ, utì *cap.* 8. demonſtratum eſt, ſolidum tamen, quod ex prima ſit ex *cap.* 9. ſubduplum ſolidi ex ſecunda circa axem N B revoluta, patet, hæc ſolida eſſe ad invicem, ut ſunt diſtantiæ centrorum gravitatis ab axe motus, adeòq; diſtantiam primæ eſſe ſubduplam diſtantiæ alterius; & data diſtantia centri gravitatis alterutrius ex Correlatis figuris, diſtantia reliquæ non ignorabitur.

7 Colliges jam, diſtantiam centri gravitatis figuræ A N o o, quadranti circulari Correlatæ, ab axe C N, eſſe ſeſquitertiam baſis Quadratricis, eidem quadranti per C adſcriptæ; cùm enim debeat dupla eſſe diſtantiæ centri gravitatis quadrantis C A N, quæ æquatur $\frac{2}{3}$ baſeos dictæ Quadratricis, eò quòd ratio cōpoſita ex diſtantia centri gravitatis quadrantis ad ſemiſſem radii (diſtantiam centri gravitatis quadrantis circumſcripti) & ex ſemiſſe radii ad baſim Quadratricis, ſive ex ſemiſſe arcus C A ad radium, aut ipſius quadrantis C A N ad radii quadratum, debet eſſe ratio ſeſquialtera, eadem nempè, quæ hæmiſpherii ex quadrante ad cylindrum ex radii quadrato (juxta Archimedis doctrinas breviùs à nobis demonſtratas in Vivianeis ad

*Prop.*

*Prop.* 37. *Coroll.* 6.) quæ, ex Centro-barica, præscriptis rationibus componitur. Nota proinde fiet distantia centri gravitatis ejusdem figuræ A N o o ab A S, & notum solidum ex ipsa circa A S descriptum, utì & ex eadem circa C N.

8 In trilineo Cycloidis A a O N patebit, centrum gravitatis distare à tangente verticis A N per semissem radii, figura

quippe huic Correlata est, ex *cap.* 8. *num.* 7. semicirculus N o o, cujus centri gravitatis distantia est utique radius integer: consequenter distabit idem gravitatis centrum in trilineo Cycloidis ab ejus basi O D per $\frac{3}{4}$ diametri O N; & solidum ex tali

tri-

trilineo circa O D, triplum erit solidi ex ejusdem conversione circa N A, vel æquale erit solido ex aggregato semicirculi, & præfati trilinei, videlicet spatii A N o O a A ( aut A N O + A d D ) circa N A; cùmque cylindrus ex parallelogrammo O N A D, sive circa O D, sive circa N A, pariter idem sit; residuum, nempe factum ex D A a O semicycloide circa O D, æquabitur facto ex trilineo O a A d d D circa N A, atque, ut ipsa semicyclois ad dictum trilineum, ita reciprocè erit distantia centri gravitatis ejusdem trilinei ab N A, ad distantiam centri gravitatis semicycloidis à basi O D, videlicet in ratione sesquialtera, illa autem æquatur $\frac{5}{8}$ diametri A D ( ut mox ostendam ) ergo hæc æquatur $\frac{5}{12}$ ejusdem suæ diametri.

9 Quod nuper assumpsi sic ostendetur: notum est, duas simul lineas in trilineo Cycloidali O a A d D à centro æquè remotas, a d, a d, æquales esse basi O D, seu interceptæ o d inter peripherias semicirculorum A o D, N o O; ipsa igitur o a, accepta in trilineo A a O o N versùs basim, æqualis semper erit lineæ a d, sumptæ versùs verticem A in altero trilineo A a O D d A; itaque ipsum trilineum A a O o N haberi poterit pro eodem O a A d D inversè posito, & tanta erit centri gravitatis distantia in hoc ab ipsa A N, quanta in illo similis centri distantia ab O D Jam sic: solidum ex solo A a O n N circa O D triplum est ( ex supra ostensis ) solidi ex eodem spatio circa N A; & annulus ex semicirculo N O o circa O D (nam perinde est, ac circa A N) est ejusdem duplus; itaque solidum ex utriusque complexo A a O o N circa O D quintuplus est solius solidi ex O a A N n circa N A, additoque & hinc annulo ex semicirculo eodem circa N A, cujus quantitas ejusdem solidi est dupla, habebitur, quòd solidum ex integro spatio A a O o N circa O D, ad solidum ex eodem circa N A est, ut 5 ad 3, distantia igitur centri gravitatis talis spatii ab O D, ad distantiam ejusdem ab A N est, ut 5 ad 3; idcòque prima distantia æquatur 5. octantibus diametri N O, vel A D, indeq; ( ex præmissis ) distantia centri gravitatis trilinei O a A d D ab A N eadem erit, quam supra determinavimus.

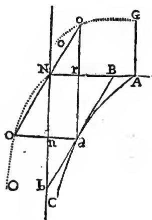
10

10 Cùm igitur & ſpatium Ciſſoidale, juxta dicta *cap.* 8. *num.* 9. figura ſit Cycloidi Correlata, erit diſtantia centri gravitatis ſpatii Ciſſoidalis A N o o infinitè longi, à C N, dupla diſtantiæ ſimilis centri cycloidis A a C N ab eadem baſi

C N; cùmque hæc æqualis ſit $\frac{5}{12}$ diametri, juxta dicta *num.*8. illa æqualis erit $\frac{10}{12}$, ſeu $\frac{5}{6}$ ejuſdem diametri, ac conſequenter diſtabit idem gravitatis centrum ab aſymptoto A O per ſextantem diametri N A; eritque ſolidum ex Ciſſoide A N o o circa A O revoluta, æquale quintæ parti ſolidi ex eodem ſpatio circa C N converſo, aut $\frac{2}{5}$ ſolidi ex Cycloide A C N circa baſim C N (quippe hoc ſolidi ex Ciſſoide circa eumdem axem ſubduplum eſt, utì jam oſtendimus *cap.* 9. *nu.*12.) eſt verò, ut ibidem monuimus, ſolidum ex Ciſſoide circa A O, æquale annulo ſtricto ex ſemicirculo genitore, ſolidum igitur ex ſemicirculo genitore Cycloïdis circa tangentem verticis, vel baſim cycloidis revoluto, æquatur $\frac{2}{5}$ fuſi Cycloidalis ex cycloide circa baſim rotata, qui propterea fuſus æquabitur 5. octantibus circumſcripti cylindri ex parallelogrammo D O N A ſemicirculi quadruplo, indeque producente cylindrum quadruplum dicti annuli.

11

11 De infinitarum parabolarum, atque hyperbolarum, deque Tractoriæ centro non est quod addam, Tute ipse exerce, mi Lector; ego obiter adnoto, in figura N o O ad eumdem axem N b Logisticæ Correlata, ejus gravitatis centrum



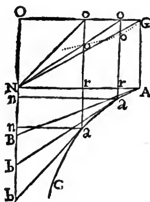

ab N A distare per duplum subtangentis Logisticæ, quandoquidem centrum Logistici, spatii, ex superiori Undecimo Theoremate, distat ab ordinata A N per simplicem longitudinem subtangentis; complexi verò ex figuris Correlatis, scilicet spatii C a A N o O centrum gravitatis distat ab A N per sesquialteram longitudinem subtangentis; imò generaliter semper in figuris Correlatis, quarum partium distantia interioris, ( scilicet ad quam pertinet tangens a B ) est 2, earum distantia complexi ex utroque spatio est 3, distantia verò exterioris ( scilicet ad quam ordinantur ipsæ o n æquales subtangentibus alterius ) est 4; utì est evidens ex dimensione solidorum ab ijs factorum : unde expeditiùs demonstrabis quæ *num.* 9. dicta sunt.

Data autem opera, tum hìc, tum *cap. præceden.* omisimus demonstrationem centri gravitatis in figuris ad modum Spi-

T ra-

ralium descriptis, ut in ijs exercere se possit Lectorum industria, comparando videlicet triangula illa, ex quibus constant, cum parallelogrammis figurarum Correlatarum, ut supra fecimus *cap.* 8. *num.* 12.

12 In Logistica igitur A a a C, cujus Correlata figura ad ordinatam N A est parallelogrammum A G O N, ut ostendimus *d. cap.* 8. *num.* 13. cùm distantia centri gravitatis ipsius




O G A N dupla esse debeat distantiæ similis centri Logisticæ N A a C ab eodem axe N B; sit autem distantia illa in parallelogrammo æqualis semissi ipsius N A, patet, distantiam ejusmodi in spatio Logistico fore $\frac{1}{4}$ ejusdem N A, utì in hoc Duodecimo Theoremate ab Hugenio propositum fuit; sed & constat methodus comparandi distantias centri gravitatis variarum insuper Logisticæ partium ab eodem axe; accepto quippe spatio quolibet n a a n, ordinatisque a r o, a r o, patet, rectangulum o r r o esse figuram Correlatam ipsi a n n a; datur autem distantia centri gravitatis parallelogrammi ejusdem ab N O, scilicet media arithmetica inter r N, r N distan-

ſtantias laterum ab N O, itaque & ejus ſubdupla dabitur, ſcilicet diſtantia centri gravitatis figuræ n a a n ab eodem axe, perpetuò æqualis ſemiſſi mediæ arithmeticæ inter extremas ordinatas. Id quod ſuo modo obſervatur & in toto Logiſticæ ſpatio, extremæ ſiquidem ordinatarum ſunt A N, & punctum; media inter hæc arithmetica ſemiſſis N A; hujus dimidio, nempe $\frac{1}{4}$ N A æqualis prorſus eſt diſtantia centri gravitatis integri ſpatii Logiſticæ. Dabitur ergo in quovis hujuſmodi ſpatio, ſive integro, ſive duabus ordinatis intercepto, punctum ipſum, quod gravitatis ejus centrum determinat, adeòq; jam metiri licebit ſolida à Logiſticæ ſpatiis circa quamlibet lineam revolutis, ex dimenſione tum ipſius Logiſticæ, tum diſtantiæ ejus centri gravitatis à propoſita linea.



# CAPUT XII.

*Theorema Decimumtertium demonstratur. Eadem semper centri gravitatis in quibusvis infinitè longis Logisticæ solidis distantia; quomodo in ejusdem solidi portionibus indaganda. Prima demonstratio Decimiquarti Theorematis; ad majorem rigorem quomodo exigenda. Solidorum ab eadem figura circa basim, & axim rotata distantiæ centri gravitatis sunt, ut distantiæ ab axi, & basi genitricis figuræ. Altera ejusdem Theorematis demonstratio. Variarum Conoideon centra hinc determinanda; in portionibus solidi rotundi, aut cylindricis Logisticæ truncis, aut figura Logisticæ Correlata, centra gravitatis dantur. Libræ infinitæ, geometricè decrescentibus, & æquè distantibus ponderibus gravatæ, aut finitæ quidem, sed per intervalla continuè proportionalia arithmeticè in infinitum crescentibus quantitatibus oneratæ, centra æquilibrii determinari possunt. Secunda demonstratio à scrupulo vindicata. Cautio in his adhibenda; aliorum lapsus notati, ut devitentur. Curvis superficiebus solidorum generalis demonstratio applicatur. Logistica curva centro gravitatis caret; circa axem rotata superficiem infinitè longam, finitæ dimensionis producit: in qua ad determinatam hyperbolam ratione; hæc hyperbola, cujus parabolicæ lineæ in semitransversum ductæ rectangulo æqualis; curva illa superficies, cujus circumferentiæ, & peripheriæ*

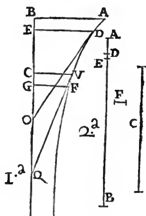
*riæ parabolicæ rectangulo æqualis ; ut ejus portiones correspondeant ejusdem parabolæ partibus. Tractoriæ solidum finita superficie gaudet, ejus curva centro pariter caret.*

1 POst centra gravitatis spatiorum Logisticæ, progreditur Hugenius ad gravitatis centra in ejus solidis determinanda : *Repèrimus*, inquit Theorem. XII. *quòd centrum gravitatis primi ex dictis solidis infinitis distat à sua basi per semissem subtangentis*. Primum quippe illud solidum ex Logistica F B C A circa axem F O revoluta, resolutum in circulos basi parallelos, proportionaliter analogum est alteri

Logisticæ B N M, ordinatarum in duplicata priorum ratione decrescentium, qualem supra descripsimus *cap.* 9. *nu.* 4. eadem igitur erit distantia centri gravitatis præfati solidi à circulo suæ basis, quæ distantia centri gravitatis Logisticæ B N M à sua extrema ordinata F B; sed hæc distantia æquatur subtangenti ejusdem Logisticæ B N M, per Undecimum Theorema Hugenii superiori capite demonstratum, & hæc eadem subtangens ostensa est *cap.* 9. *num.* 5. æqualis semissi subtangentis F O, pertinentis ad priorem Logisticam B C A; itaque & il-

illius solidi rotundi centrum gravitatis distabit ab extremo circulo suæ basis per semissem subtangentis, seu Parametri. Quod erat demonstrandum.

2 Eadem itaque semper erit distantia centri gravitatis à sua basi infinitorum quorumvis solidorum ab eadem Logistica per varias ordinatas resecta factorum, semper scilicet æqualis dimidiæ subtangenti ejusdem Logisticæ; Quocirca portionum etiam cujusvis ex dictis solidis centra gravitatis assignari poterunt: proponatur enim verbigratia quod fit ex

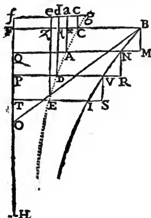



portione B A V C circa B C revoluta; ita procedemus, simili methodo, ac superiori capite *num.* 3. esto B O semissis subtangentis, & consequenter O centrum gravitatis totius facti ab infinito spatio B A V Q. Similiter & C Q semissis subtangentis ejusdem, ut punctum Q sit centrum gravitatis solidi, quod ex C V F Q; distat igitur hoc centrum à puncto O, per Q O æqualem altitudini solidi propositi B C, propter communem additam, vel detractam C O; fiat igitur, ut solidum ex A B C V ad infinitum ex C V F Q, nempe, ut colligitur ex dictis *cap.* 9. *num.* 3. *&* 10. ut differentia qua-

dra-

dratorum A B, & C V ad quadratum C V, ita Q O, vel B C ad aliã C E, erit E centrum gravitatis solidi ex spatio B A V C circa B C revoluto geniti; quamquàm expeditiùs forte idem obtinere licebit per inventionem distantiæ centri gravitatis ab ordinatis in congruo spatio Logisticæ, in duplicata ordinatarum ratione decrescentis, proportionaliter analogo ad dictũ rotundum solidum, uti numero præcedenti indicavimus.

3 Difficilior mihi visa fuit, neque ipsa nonnisi ægrè successit (cur enim fateri erubescam, qui & in magis obviis moram pati aliquando soleo?) Theorematis Decimiquarti demonstratio, ubi Vir Clarissimus pronunciat, quòd *centrum etiam gravitatis alterius solidi distat ab ejus infinita basi per octantem sui axis*. Hoc ut demonstrem, figuram resumo, eumdemque calculandi modum, quo *cap.* 10. *num.* 6. usus sum:




ex parallelogrammis itaque F M, Q R, P S Logisticæ circumscriptis, intelligatur confici in conversione omnium circa F B, series solidorum, quæ pro minori, ac minori latitudine singulorum, magis, magisque accedet ad rotundum Logisticæ solidum, de quo in hoc Theoremate sermo est; itaque ubi F Q infinitè parva supponatur, tunc cylindrus ab F M de-

descriptus, & tubi cylindrici ex reliquis QR, PS, &c. prorsus coincident cum tali Logisticæ solido, quodque de iis demonstrabimus, de hoc perinde obtinebit; porrò ostendimus loco citato (retentis iisdem symbolis) cylindrum F M esse *ddb*, & tubos huic consequentes per ordinē esse $\frac{3ddb}{a}$, $\frac{5ddb}{aa}$, &c.

ut supra ad finem *pag.* 129. seu (propter infinitè exiguum excessum ipsius *a*, seu F O supra assumptam unitatem Q O, qui excessus penitus evanescit, ubi solidorum series in ipsum Logisticæ solidum deficit) accepta loco ipsius *a*, unitate, quæ ad quemlibet gradum elevata non crescit, nec terminos dividens illos immutat, erit prædicta solidorum series æqualis *ddb* + 3 *ddb* + 5 *ddb* + 7 *ddb*, &c. suspenditur autem in libra F B primus terminus ad punctum C, medium ipsius F B, & secundus terminus ad punctum x, ubi cadit axi parallela, ducta ex medio puncto A lineæ Q N; & tertius terminus ad y punctum, quod determinat parallela y D bifariam secans ipsam P V; similiter & quartus terminus pendet ex z per lineam zE bisecantem ipsam T I; sunt enim puncta C, x, y, z, &c. centra gravitatis per ordinem talium solidorum;

per

per puncta verò C, A, D, E, & alia similiter bifariam secantia singulas Logisticæ ordinatas, transit utique linea pariter Logistica EDACg. Producta igitur OF in f, ut Ff æquetur semissi ipsius FQ (adeòque à fortiori sit infinitè parva quantitas, ac penitus evanescens) ad parallelam ordinatam fg producantur axi æquidistantes Ez, Dy, Ax, in e, d, a, c; poterit similiter fg sumi pro libra, ex qua pendeat primum solidum per lineam Cc, secundum per lineam Aa, tertium per Dd, quartum per Ee, &c. & quidem quarum partium Ff, seu Cc ponitur 1. talium Aa est 3. Dd 5. Ee 7. &c., juxta progressionem arithmeticam numerorum imparium, secundùm quam ipsa solida ex iis pendentia procedunt; perinde igitur onerabitur linea fg, vel FC à talibus solidis ex ea pendentibus, ac oneretur fg à lineis Logisticæ gCADE; sed ab his ordinata fg sic oneratur, ut centrum æquilibrii habeat distans ab axe FO per quadrantem ipsius fg, vel FC illi proximè æqualis (talis quippe ex Theoremate Duodecimo est distantia centri gravitatis Logistici spatii, quod tales lineæ implent) ergo & centrum æquilibrii, aut gravitatis omnium illorum solidorum, seu integri solidi ex Logistica circa ordinatam revoluta, distat similiter ab axe per quadrantem ipsius FC, seu octantem integræ FB ordinatæ; quod est propositum.

4 Si quis autem majorem in præsenti demonstratione rigorem desideraverit, is poterit apagogico circuitu sibi penitus satisfacere, sumptis, loco linearum Cc, Aa, Dd, Ee, parallelogrammulis Ccg, Aac, Dda, Eed, &c. quæ penitus proportionalia deprehendet dictis solidis, siquidem eorum altitudines BF, QN, PV, &c. proportionantur earumdem semissibus, & talium semissium differentiis gC, Ca, ad, de, &c. bases verò talium solidorum sunt, ut differentiæ quadratorum ex lineis FQ, FP, FT, &c. arithmeticè crescentium, scilicet ut impares numeri, vel ut lineæ Cc, Aa, Dd, Ee, &c. Unde cùm accepta fuerint tot solida, quæ integrum Logisticæ solidum impleant, & totidem parallelogramma, quæ Logisticum illud spatium adæquent, constabit, in eodem puncto, tum Logistici illius spatii centrum

æquilibrij, tum solidi illius centrum gravitatis reperiri, adeòque ad quartam ipsius F C, vel octavam totius F B partem ab axe acceptam. Quod, &c.

5 Sed absit, ut hìc ego subsistam; tamdiu mihimet ungues corrodam, quò usque clariorem, (& verò generalissimam) rei hujus demonstrationem detur extundere; mihi certè videtur universalius quidpiam hinc relucere, quam ut peculiaribus Logisticæ proprietatibus adstringi mereatur. Jam jam assequor: an non hoc illud est, quòd in qualibet figura F B V, cujus basis F B, axis F Q, *fig seq.* quam rationem habet distantia centri gravitatis figuræ planæ ab axe, ad similem distantiã à basi, eamdem & proportionem habent ad invicem distantiæ centri gravitatis (uniuscujusque à sua basi) solidorum ex eadem circa basim, & circa axim revoluta progenitorum? Intelligatur enim tota figura circa punctum F in suo plano verticali converti, quousque axis F Q horizontaliter, situetur in F q, in directum positus priori basi F B, quæ jam perpendiculariter pendeat in F b; sumptaque axis portione F Q æquali ipsi F q, ordinentur Q N, q n, quæ erunt æquales; imò eædem; & in solido quidem ex figura circa F B revo-

lu-

luta, cogitetur per punctum Q transire cylindrica superficies à linea QN descripta in sui rotatione circa FB, cujus quidem rectangulum per axem duplum erit, ut constat, inscripti rectanguli FQNP; in solido autem ex eadem Figura

circa axem Fq revoluta, concipiamus per punctum q transire circulum radio qn descriptum, & bisecta in A ipsa QN, ducatur AX ipsi FQ parallela; pendebit igitur in priori solido cylindrica superficies à linea QN descripta ex puncto X, quod est ejus centrum gravitatis; circulus verò radii qn pendebit ex suo centro q; est autem distantia qF ad FX, ut ipsa cylindrica superficies ex QN ad circulum ex qn (est enim cylindrica superficies quælibet ad datum circulũ, ut rectangulum per axem illius, ad quadratum ex radio hujus, per propositionem quintam Torricellii de solid. spher. l. 1. idest in proposito, ut duplum rectangulum PNQ ad quadratum nq, sive ut dupla PN, vel FQ ad ipsam QN; vel ut simplex qF ad FX ipsius QN dimidiam) æquiponderant igitur ex F, tum ille circulus, tum hæc superficies; & hoc semper; quare & utriusque solidi ad libram continuatam BFq appensi æquilibrium habebitur ex puncto F; unde distantia centri gravitatis solidi ex Fbnu circa Fq à sua basi transeunte per punctum F, erit ad distantiam centri gravitatis solidi ex figura eadem FBNV circa FB revoluta à sua basi per F transeunte, ut reciprocè hoc secundum soli-

 dum

dum est ad illud primum; sed quia utrumque gignitur ab eadem figura, nunc circa basim F B, nunc circa axem F q, vel F Q revoluta, hæc solida sunt ad invicem, ut distantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à lineis, circa quas fit rotatio,

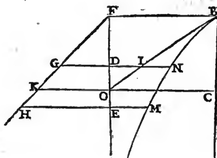
nempè ut distantia, quam habet centrum gravitatis planæ figuræ F B V à basi F B, ad distantiam ejusdem ab axe Q F; distantiæ igitur centri gravitatis solidorum ab eadem figura descriptorum, nunc facta circa axem, nunc circa basim rotatione, sunt ad invicem, ut distantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à base ad ejusdem distantiam ab axe. Quod est propositum.

6 Cùm igitur distantia centri gravitatis spatii Logistici à sua basi, ad distantiam ejusdem ab axe sit, per Theoremata Undecimum, & Duodecimum supra demonstrata in capite præcedenti, ut subtangens Logisticæ ad quadrantem ordinatæ, seu basis, vel sumendo terminorum semisses, ut dimidium subtangentis ad basis octantem, etiam distantiæ centrorum gravitatis à sua basi in solidis à Logistica circa axem, & circa ordinatam revolutis, in eadem proportione erunt; quare cùm, ex Decimotertio Theoremate, centrum gravitatis distet à basi solidi ex Logistica circa axem per dimidium subtangentis, etiam centrum gravitatis solidi ex Logistica circa ordinatam, distabit à sua basi per octantem ordinatæ, ut in hoc Theoremate XIV. proponitur. Q. e. d.

7 In-

7 Intereà hinc habes, data ratione diſtantiarum centri gravitatis cujuſvis figuræ, tum ab axe, tum à baſi (ſive ab aliis duabus quibuſcumque lineis) dari & rationem diſtantiarum centri gravitatis à baſi in ſolidis circa eaſdem lineas revolutis, atque una iſtarum determinata, alteram non poſſe ignorari; quocirca omnium fuſorum parabolicorum ex parabolis circa baſes revolutis dabuntur centra gravitatis, quippe dantur & centra omnium Conoidum ab iiſdem circa axes rotatis productorum, nec ignoratur proportio, ſecundùm quam gravitatis centrum diſtat ab axe, & baſi infinitarum quarumvis parabolarum; Tu per teipſum, Mi Lector, doctrinam hanc his, aliiſq; figuris applicare ne graveris, mihi ad finem properanti immorari diutiùs non vacat, innuiſſe ſuffecerit.

8 Neque difficilius erit partium utriuſque ex dictis ſolidis centra eadem arte rimari, quum præmiſſum ratiocinium non minùs in portionibus figurarum, quàm in ipſis integris figuris locum habere poſſit, adeòque & ad partes ſolidorum ab iis deſcriptorum transferri queat; quæque de his rotundis ſolidis




determinantur, in truncis pariter cylindricis, ſeu factis ex ductu ſpatii Logiſticæ FBNM in triangula FDG, FEH (quippe quæ illis rotundis proportionaliter analoga exiſtunt)

pe-

perinde obtinere manifeſtum eſt; ſed & hinc ſpontè profluit diſtantia centri gravitatis ab axe N b in figura N o O Logiſticæ

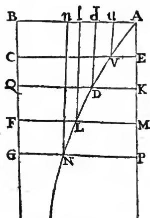
ad axem Correlata, quippe analoga pariter eſt ſolido ex Logiſtica circa ordinatam, cùm oſtenſum ſit *cap.* 10. *num.* 9. lineas O n correſpondere rectangulis N n a Logiſticæ inſcriptis, ſive cylindricis ſuperficiebus per idem punctum n in præfato ſolido tranſeuntibus.

9 Animadvertēdum etiam, ex his quatuor poſtremis Theorematibus facillimè deduci, quodnam ſit æquilibrii centrum in libra longitudine infinita, in qua paribus intervallis diſſitæ magnitudines appenderentur in eadem ratione geometrica decreſcentes, velut in hac figura ſe habent A, B, C, D, E, F, &c.

| A | B | C | D | E | F | G | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{64}$ | , &c. |

in infinitum, & quomodò, ſi illæ magnitudines jam decreſcerent

rent in duplicata priorum ratione, centrum æquilibrii duplò propiùs accederet termino libræ, unde omnium maxima penderet; Hæc enim ex Undecimo, & Decimotertio Theorematibus constare possunt, si Logisticæ axem veluti infinitam libram orizontaliter dispositam accipiamus, unde Logisticæ spatia proportionaliter deficientia, æqualium tamen latitudinum, pendeant, idemque fiat in axe solidi ex Logistica circa axem rotata geniti, sumptis æquè crassis ejusdem solidi portionibus, &c. Habetur item, dispositis in libra finita magnitudinibus arithmeticè in infinitum crescentibus, quales repræsentant lineæ V u, D d, L l, N n, &c. axi BG, Logi-




sticæ A V D L N parallelæ, & ad ordinatæ partes proportionales A u, u d, d l, l n, &c. applicatæ, sed intervallis geometricè decrescētibus inter singulas relictis, itaut geometricæ progressionis terminus libræ extremo respondeat, unde infinita magnitudo suspenditur, assignari posse centrum æquilibrii omniū ipsarum magnitudinum; & quòd si jam dictæ magnitudines ex iisdem punctis suspensæ crescerent in duplicata priorum ratione, seu procederent, ut numerorum arithmeticè crescentium quadrata (ut se habent circuli in solido ex Logistica circa ordi-

di-

dinatam rotata ) centrum æquilibrii duplò propius fieret maximæ, & infinitæ magnitudini, ultimum libræ extremum occupanti; id enim ex Duodecimo, & Decimoquarto Theoremate abundè innotescit, & sua veluti sponte profluit; Hæc porrò ex iis Problematibus, aut Theorematibus sunt, quæ, si nudè, & extra hanc materiam proponerentur, mirabilia omnibus, nonnullis quoque determinatu impossibilia videri possent.

10 Porrò, cùm Viro illustri demonstrationem *num.* 5. allatam communicassem, scrupulum injecit, an satis tuta esset, ab æquiponderantia singularum superficierum cylindricarum unius solidi, cum singulis circulis alterius, ad ipsorummet solidorum æquilibrium facta deductio: monebat quippe hinc consequens fore, ut ipsarummet planarum figurarum illo modo appensarum æquilibrium fieret ex eodem puncto F, ex quo semper, *vide fig. seq.* P N ad n q esset reciprocè (ob æqualitatem homologarum linearum) ut distantia q F ad distantiam F P; unde solida ex figuris circa axem, æqualia forent solidis ex iisdem circa basim revolutis, quod est absurdum: reposui tamen, vetustam illam esse, ac sæpiùs convulsam exceptionem Cavallerianæ methodo dudum oppositam; sive prorsus indivisibilia non admitteret, eo modo, quo sub geometricam considerationem cadunt, sive saltem respueret in Staticæ negotio, pro illis reponeret solida quàm minimùm crassa, ut hinc tubos cylindricos, illinc cylindrulos æqualis crassitiei, sive inscriptos, sive circumscriptos præfatis solidis, atque ab iis differentes minori differentia qualibet data, & tum demonstrationem, ( utut minori compendio ) pari evidentia successuram; enimverò ad libram hinc inde appositis æquiponderantibus quantitatibus, atque his, aliis rursus æquiponderantibus additis, modò totidem hinc, totidem inde suspendantur, & utrumque aggregatum æquiponderare. In allato figurarum planarum exemplo conditionem non servari, quippe lineæ P N axi parallelæ non totidem sunt, quot lineæ q n parallelæ basi, siquidem illæ ad basim, hæ ad axem, quibus respectivè applicantur, sunt computandæ, atque eò plures ex alterutra parte sunt, quàm ex altera, quantò major est linea, ad

quam

quam ordinantur, & quantò majori invicem intervallo diſtant; ideò cautum fuiſſe in demonſtratione (quemadmodum & facit Torricellius de dimenſ. parab. propoſ. 20. cujus hæc noſtra imitatio eſt) ut linea F q æqualis ſumeretur ipſi Q F, ut circulus radii n q, qui ad illam applicatur, comparari legitimè

poſſet cum cylindrica ſuperficie ex Q N rotata, & ad punctum Q, diſtantiamque Q F ſuo ſolido inſerta; atque utinam id obſervaſſet qui ſolidum hyperbolicum infinitæ latitudinis metiri aggreſſus eſt, non enim illud (perinde ac infinitè longum Torricellii) finito cylindro æquale tam præproperè concluſiſſet, neque exemplis aliis indiviſibilium uſum in ſuſpicionem adducere tentaſſet. Si methodi certitudo ex illegitimis applicationibus ſit æſtimanda, nec Veterum Inſcriptiones extra diſcrimen futuras, quippe iis abuſus eſt Guarinus in ſuo Euclide methodico, ubi Spheroidis, & Conoidum omnium ſuperficiem ad menſuram vocat, atque ubi generaliter cujuſvis Conoidis ſuperficiem ad cylindricam circumſcriptam ſe habere ſtatuit, ut genitrix figura ad rectangulum circumſcriptum. Fermatius quoque analyticæ ſuæ methodi, perquàm pulcherrimæ, ac ſimpliciſſimæ, applicatione ad tangentem Quadratricis determinandam infœliciter uſus eſt, necnon VVallisius compoſitione motuum ejuſdem Quadratricis perperam conſiderata, aliam quidem, ſed æquè à veritate alienam ejuſdem tangentis conſtructionem adornavit, uti aliàs

monuimus. Item Guarinus, Sturmius, Borellius, Rinaldinus circa Spiralis Archimedeæ longitudinem hallucinati sunt, quamquàm rem se demonstrasse putaverint, ut in Epist. Geometr. ad P. Cevam ostendo. Quamquàm Viris Clarissimis, ac de Geometria optimè meritis, quorum primus superstes adhuc hanc scientiam novis inventis illustrat, nolim quidpiam hoc loco detractum esse, quum, si quid ipsis fraudi fuerit, humanæ id vitio conditionis, cui omnes obnoxii sumus, tribuendum sit, præclarissimis verò operibus ita sibi Nominis Immortalitatem comparaverint, ac posteros devinxerint, ut nihil his decedere possit, ex quò sublimioribus meditationibus distracti, haud satis attentè perpendere curaverint leviora hæc, quæ ad methodi nostræ defensionem, Lectorumque, quibus prodesse cupimus cautelam adnotare coacti fuimus, *ne à magnis*, ut ait ille, *nominibus præjudicium fieret Veritati*.

11 Opportunè autem (ut ejusdem propositionis usus ampliùs pateat) hìc illam applicare juvat curvis superficiebus, quas gignit curva quælibet B N V, tum circa basim F B, tum circa axim F Q rotata; utique enim centra gravitatis ejusmodi curvarum superficierum à circulo suæ basis distabunt in iisdem rationibus, in quibus centrum gravitatis curvæ lineæ genitricis, tum ab axe, tum à basi distabat; idque, facta eadem constructione, eodemque ratiocinio manifestum est, sumpto puncto N in curva circa basim, & puncto n simili, eodemque

demque ( ſeu tantumdem ab homologis extremis diſtante) in curva circa axim rotanda ; utique cùm ſit linea PN ad qn, ut diſtantia qF ad diſtantiam FP ( propter æqualitatem homologarum linearum ) etiam peripheria radio PN in curva ſuperficie deſcripta per rotationem circa baſim, ad peripheriam radio qn deſcriptam in altera curva ſuperficie ex rotatione ejuſdem curvæ circa axem, erit, ut diſtantia hujus à termino F ad diſtantiam illius ab eodem termino ; æquiponderant igitur ex F dictæ peripheriæ, aliæque omnes per quævis curvæ genitricis puncta in utraque illa converſione tranſeuntes, totidemque in una ſunt, quot in altera termini æquiponderantes, nam dictæ peripheriæ eamdem curvam, & ad idem prorſus punctum ſtringunt, unde non plures hinc, quàm illinc computantur; quare & ipſæ ſuperficies curvæ ex eodem puncto F æquiponderabunt, eritq, reciprocè, ut una ſuperficies ad alteram, ſive ut diſtantia centri gravitatis curvæ à linea, circa quam hinc, & illinc convertitur, ita diſtantia centri gravitatis hujus ad diſtantiam centri gravitatis illius, uniuſcujuſque nimirum à circulo ſuæ baſis per F tranſeuntis. Unde mirùm quot Conoidum ſuperficies centrum gravitatis ſibi determinent. Quæcùmque autem de ſolidis rotundis, deque rotundis ſuperficiebus ex eadem figura, vel linea qualibet circa axem, & circa baſim rotata dicta ſunt, perinde ſimiliter obtinere in Ungulis ſolidis, aut ſuperficialibus, plano per axem, vel baſim tranſeunte, & ad eumdem angulum utrinque inclinato, abſciſſis ex cylindris ſuper eaſdem figuras erectis, clariùs eſt, ac inter Geometras magis vulgatum, quàm ut hìc à nobis exponi indigeat, ob proportionalitatem, tum triangulorum ſimilium, quibus Ungulæ ſolidæ ſecantur, cum circulis rotundorum ſolidorum, tum laterum Ungularum ſuperficialium, cum peripheriis circularibus rotundarum ſuperficierum homologarum.

12 Quamquàm in noſtro propoſito Logiſticæ, utique tota curva centro gravitatis carere cenſenda eſt, adeòque ad invenienda utriuſque ſuperficiei curvæ, ambarum ejus Conoideon, centra gravitatis, obſervatio noſtra in hoc, & ſimilibus caſibus inutilis manet; Ratio eſt, quia ſi quod habe-

 ret

ret gravitatis centrum curva Logiſtica BNM, illud certè in axe non foret, eò quòd curva ſuam convexitatem illi obvertat; ſed neque in ulla ab axe diſtantia; quantilla enim hæc foret, circumferentia à tali centro deſcripta, in converſione curvæ circa axem, determinatæ alicuius longitudinis eſſet, & rectangulum ex ipſa in curvam infinitam Logiſticæ, adeòque & ſuperficies curva, in rotatione circa axem deſcripta, immenſæ magnitudinis foret; cùm tamen finitam eſſe ſic demonſtretur. Ad quamlibet ordinatam DN, aut illi parallelam FAB, applicentur ipſæ tangentes NC, MG; itaut



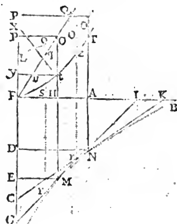
* *interponenda eſſet litteris* H, *&* A *littera* s

ductis axi parallelis NAO, MHO, ſecetur AO æqualis tangenti NC, & HO æqualis tangenti MG; atque ita ſemper, quouſque compleatur figura AOOLF. Dico (non in Logiſtica modò, ſed in quavis curva, facta ſimili conſtructione) ſpatium hujus figuræ eſſe ad curvam ſuperficiem ex rotatione curvæ MN circa axem DE, ut radius ad circumferentiam alicuius circuli; id quod valet etiam de partibus proportionalibus, putà ſuperficie OAHO, comparata ad

por-

portionem curvæ superficiei à curva M N, parallelis M H O, N A O intercepta, progenitam; sumpta siquidem quantumlibet parva tangentis particula N r, aut M r, ac ducta parallela r s; cùm sit tota N C, idest O A, ad N r, ut D N, vel F A, ad A s (eodemque modo G M, seu O H ad M r, ut E M, vel F H, ad H S) erit rectangulum O A s æquale rectangulo ex D N in N r, & O H S æquale rectangulo ex E M in M r; atque ita semper; itaque Ungula superficialis ex cylindrico ipsi curvæ N M insistente, resecta plano per axem transeunte, & per 45. gradus ad planum basis inclinato (in qua consequenter erectæ forent ad singula curvæ puncta rectæ lineæ ipsis ordinatis æquales) erit æqualis spatio congruenti, à curva O o L terminato, quippe tam benè coincident rectangula D N r, E M r cum portionibus talis superficiei, ob tangentes infinitè parvas cum curva coincidentes, quàm coincident rectangula O A s, O H S, cum spatio ipso à curva o O terminato, ob infinitè parvam singulorum rectangulorum latitudinem; prædicta verò Ungula est ad curvam superficiem à curva circa axem rotata genitam, ut radius ad circumferentiam circuli, quippe in Ungula ordinantur ipsæ D N, E M, punctis curvæ insistentes, in superficie verò rotunda ordinantur earumdem peripheriæ; itaque spatium sic determinatum à curva O o L erit ad rotundam superficiem solidi ex curva circa axem rotata, ut radius alicujus circuli ad ejus circumferentiam; & quoties spatium A O o L F finitum erit, etiam illa rotunda superficies pariter determinatæ magnitudinis esse convincetur; est autem illud spatium finitum, quoties A O, H O, idest ipsæ tangentes N C, M G in immensum non excrescunt, uti accidit in nostro casu, in quo semper fiunt minores, utpote æquales potentia eidem quadrato subtangentis, simul cum quadrato ordinatæ minoris, ac minoris in infinitum; quò constat spatium A O L F, cujus longitudo determinata A F, latitudines autem ubique A O, H O, & cæteræ, nedum non infinitæ, sed semper minores, usque ad ultimam F L soli subtangenti æqualem, infinitum esse non posse, imò esse minus rectangulo F A O illud circumscribente.

13 Manifestum est porrò, curvam O o L in hoc casu esse hyperbolam æquilateram, axe recto F A, semitransverso F L, subtangentis longitudinem æquante, descriptam, quippe ultima tangentium, evanescente ordinatæ quadrato, erit potentia, adeòque & longitudine, æqualis soli subtangenti; intellecta igitur F D eidem æquali, ut integer axis transversus sit D L,



atque ordinatis O P, O P; quoniam differentia quadrati tangentium, sive ejus æqualium H O, vel A O, idest F P, F P, à quadrato subtangentis F L, est quadratum ordinatæ E M, aut D N, sive ipsarum O P; erit semper rectangulum D P L æquale quadrato P O, adeòque hyperbola L O o æquilatera.

14 Est autem hyperbolicum spatium A O o L F æquale rectangulo ex subtangente Logisticæ in parabolicam curvam illam, quæ Logisticam perpendiculariter secat, juxta determinationem *cap. 5. num.* 14. propositam, quæque eamdem, seu æqualem suscipit ordinatam, aut eisdem axi parallelis interiicitur; sit enim ejusmodi parabola F t T, cujus semiparameter æqualis subtangenti Logisticæ, videlicet F L, tangenti in

pun-

puncto t, seu ipsi curvæ perpendicularis t X abscindens ex axe infra ordinatam t y ipsam y X æqualem semiparametro, seu ipsi F L (juxta ibidem dicta) itaque X t æquabitur H O, & ducta quavis axi parallela, erit X t ad X y, seu O H ad L F, ut quævis tangentis portio, lineis infinitè proximis H t, S q intercepta, ad ordinatæ y t portionem, iisdem lineis interpositam; rectangulum itaque ex hac ordinatæ portione in H O semper æquale erit rectangulo ex constante linea F L in illam tangentis portionem, omniaque rect-la spatio hyperbolico adscripta æquabuntur rectangulo ex F L in curvā parabolicam F t T, ac partes partibus correspondentibus; itaque rectangulum sub circumferentia, radio F L, seu subtangentis Logisticæ descripta, in curvam parabolicam F t T, æquale erit curvæ superficiei rotundi solidi ex Logistica N M circa axem voluta progeniti, partes etiam correspondentibus partibus æquabuntur, & talis curvæ superficiei portiones, planis quibuscumque D N, E M interceptæ, erunt ut partes parabolicæ curvæ t T, inter axi parallelas ab iisdem curvæ punctis ductas conclusæ.

15 Affine huic est, quod in solido ex Tractoria circa axem revoluta nuper detexi, nempe applicatis tangentibus ad singula ordinatæ puncta, quæ, utpotè æquales, cōflabunt superficiem parallelogrammam A O P F, subtangentis longitudine, & ordinata contentā, erit infiniti illius solidi superficies æqualis superficiei cylindricæ ex F A O P circa axem revoluto, quippe quæ pariter ad parallelogrammum O F sit, ut circumferentia ad radium; quapropter etiam curva Tractoria gravitatis centro carere dicenda erit, sicut Logistica, & aliæ quævis interminatæ lineæ, finitam superficiem sui rotatione describentes.



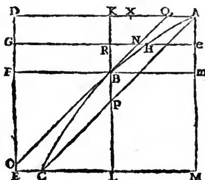
CA-

# CAPUT XIII.

*Theorema Decimumquintum in quinque partes divisum aliàs demonstratum. Figurarum ad eumdem axem compositarum, si portiones unius proportionentur ordinatis alterius, quomodo tangentes determinandæ. Alia demonstratio primæ, & tertiæ partis hujus Theorematis. Hyperbolicum spatium æquale rectangulo ordinatæ in alteram Logisticæ subtangentem. Tangens Expansæ Ungulæ cylindricæ determinata. Generalis constructio tangentium pro omnibus ungulis etiã ex cylindro non circulari abscissis. Solidi ex Logistica infinitè longi superficiem finitam esse rursus demonstratur. Hyperbola ungulæ Logisticæ correlata; ut parallelogrammum Logistico trilineo circumscriptum ad ipsum trilineum, ita cylindricus Logisticus ad suum truncum, ita & Hyperbolicus cylindricus ad truncum suum. Rotundum solidum ex hyperbola ad rotundum ex Logistica, ut inscriptum hyperbolæ parallelogrammum ad Logisticæ subtangentis quadratum. Cæteræ Theorematis partes ex longioribus Logarithmorum tabulis determinandæ. Auctoris verba circa hyperbolæ quadraturam ex Tractatu de evolutione curvarum adducta. Hyperbolæ quadratura per Tractoriam.*

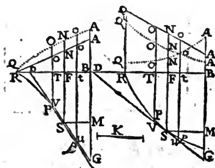
1 ULtimum Hugenii Theorema quinque partes complectitur, quas demonstraturus, & simul referam, & suis asteriscis, ordinis, & claritatis servandæ gratia, distinguam: ait

ait igitur: *1 *Notum jam est, hanc Logisticam lineam tetragonismo hyperbolæ deservire, post demonstrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa hyperbolica spatia, duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjecta.* *2 *Quòdque si duo fuerint hujusmodi spatia, in quibus ordinatæ unius sint, ut AD ad HG*




*in ultima figura, & ordinatæ alterius, ut BF ad CE, hæc spatia erunt inter se, ut lineæ DG, & FE.* *3 *Nondum autem, quod sciam, notatum fuit, hæc ipsa spatia hyperbolica esse ad parallelogrammum hyperbolæ (sic voco parallelogrammum, cujus latera sint duæ ad utramque asymptoton ordinatæ ex eodem puncto sectionis ductæ) ut unaquæque linearum DG, FE ad subtangentem FO.* *4 *Adeòut, si parallelogrammum hyperbolæ supponatur partium* 0, 4342944819, *quodlibet hyperbolicum spatium duabus ad alteram asymptoton ordinatis interjectum erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet, ut differentia Logarithmorum numerorum, exprimentium proportionem ordinatarum, ad numerum* 0, 4342944819; *acceptis scilicet Logarithmis decem notarum ultra characteristicam.* *5 *Hinc porrò facile est veritatem ostendere Tetragonismi hyperbolæ, abs me propositi in Tractatu de Evolutione linearum curvarum, quem Horologio meo oscillatorio inserui.*

2 Primam, & secundam partem jam *cap. 6. num. 2. 3. & 4.* abundè ostendimus; tertiam quoque partem, adeòque & reliquas ex his consequentes, ibidem *num. 6. & 7.* in aperto posuimus, ut nihil opus sit superaddere, plenioris tamen scientiæ, atque Lectorum utilitatis gratia, rursus eadem demonstrare aggrediar, generali hoc Lemmate præmisso, quod & in præcedentibus quadantenus attigimus: nimirum. Si duo spatia quælibet AQRB, SRB ad eumdem axem BR



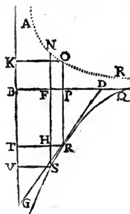
comparata fuerint, itaut semper unius portiones, à termino QR computatæ, proportionales sint ordinatis alterius, putà FNQR ad OTRQ, ut FS ad TP; manifestum est, quòd constans quædam linea K se habebit ut parameter comparationis (eo modo, quo *capite 4. num. 2.* parametrum Logisticæ exposuimus) itaut, si K in FS adæquet spatiū FNQR, etiam K in TP adæquet spatium TOQR; fiat ergo, ut K ad FN, in FD ad FS (seu ponatur NFD rectangulum æquale spatio NFRQ) dico junctam DS tangere curvam RPS in S. Patet id, tum ex *cap. 6. num. 8.* ubi generaliter monuimus, in curvis præmissæ conditionis, esse GM ad SF, idest, ob triangula similia, FB ad FD, aut rectangulum alteri figuræ adscriptum BFN ad NFD, ut idem rectangu-

lum

lum ad spatium N F R Q, quod propterea æquabitur ipsi N F D rectangulo, eritque, ut K ad F N, ita F D ad F S, quippe cùm tam extremorum, quàm mediorum rectangula eidem N F Q R spatio sint æqualia; tum etiam constat ex dictis *capite* 5. *num.* 6. & 7. ubi ex motuum compositione hanc ipsam tangentium constructionem, data præscripta figurarum conditione demonstravimus; tum denique hoc argumento; ordinentur hinc inde O T V, o t u secantes curvam in P, p, rectam verò D S in V, u; quoniam ex constructione est spatium N F R Q æquale rectangulo N F D; est verò N F t minus spatio N F t o, & N F T majus spatio N F T O in figura dextra, ubi curvæ R S convexum axem respicit, & è contra in figura sinistra majus N F t, quàm N F t o, minus N F T quàm N F T O, ubi curvæ R S concavum axi obversum est, erit residuum ex N F in T D, aut aggregatum ex N F in t D, minus spatio o t R Q, majus spatio O T R Q in prima figura, & è contra majus spatio o t R Q minus O T R Q in secunda, seu respectivè minus, & majus, majus, & minus rectangulo ex K in ordinatam t p, T P, quippe quod juxta constructionem tali spatio æquatur; habebit ergo N F ad K, idest S F ad F D, aut u t ad t D, V T ad T D, minorem, & respectivè majorem in prima figura, seu majorem, & respectivè minorem rationem in secunda, quàm habeat t p ad eamdem t D, seu T P ad eamdem T D; ideòque t p, & T P in prima figura majores erunt, quàm u t, & V T, minores autem iisdem respectivè sumptis in secunda Lectoris dexteram respiciente; & ideò puncta curvæ P, p, erunt utrobique extra rectam D S; quæ propterea tangens erit. Quod fuerat demonstrandum.

**Animadvertendum in figura sinistra hujus Schematis, in quo duæ figuræ A O Q R sunt decrescentes ad partes A B, tertiam iisdem litteris notatā decrescentem ad partes oppositas R Q (quod attinet ad hoc propositum) superfluere, neque ad hoc notatam esse, ut huic constructioni inserviat, quum evidens sit, numquam contingere posse, ut, cavitate curvæ R S G ad axem R B conversa, figura superior Q R B A ad partes R Q deficiat, esset enim rectangulum N E D, non æquale, sed majus spatio N F R Q.*

3 Cùm igitur ex dictis *cap. 6. num. 4.* lineæ in Logistica QRS axi BV parallelæ, veluti FS, PR sint ad invicem, ut spatia hyperbolica NORQF, ORQP (existentibus ABQ asymptotis, ordinatisque FN, PO, QR alteri asymptotorum parallelis) patet spatium hyperbolicum ORQP æquari




rectangulo OPD, ex ordinata OP in alteram Logisticæ subtangentem PD; unde constat, quomodo Logistica hyperbolæ quadraturæ conducat, utì in prima hujus Theorematis parte asserebatur; secundam partem citrà petitionem principii probare hinc nequeo, sed satis evidenter præostensam habes loco citato. Tertiæ partis demonstratio sic erit instituenda. Rectangulum OPD æquale est, ex dictis, spatio hyperbolico ORQP; habebit ergo parallelogrammum hyperbolæ inscriptum KOPB ad spatium OPQR eamdem rationem, quam idem habet ad rectangulũ OPD; idest quam basis BP, seu TR ad PD; aut, ob triangulorum similitudinem, quam subtangens Logisticæ GT ad axi parallelam RP. Quod erat demonstrandum.

* *Supple in figura lineam QR ipsi NF parallelam, ut pag. 63.*

4 Obi-

4 Obiter notare potes in demonstratione *num.* 2. allata, quot curvarum tangentes geometricè determinari queant, præscriptam nimirùm conditionem suscipientes. In Expansa sphærica superficie, sive Ungula quavis cylindrica in planum extensa (qualem in Demonstrationibus Vivianeorum Problematum consideravimus) specimen hic dumtaxat daturi sumus. Esto ejusmodi superficies Ungularis Expansa BQSC; cui inversè ad eumdem axem altera similis, &

æqualis, sive eademmet replicata, ANBQ applicata esse intelligatur. Constat ex Propositione quinta Demonstrat. Vivian. Probl. fore totã superficiem BAQ ad partem ANFQ resectam quavis ordinata NF, secante alteram curvam in S, ut ordinata BC ad FS, quia ordinata FN tantumdem distat à basi AQ in figura ABQ, quantùm FS à vertice Q figuræ QBC; itaque, si fiat rectangulum NFD æquale spatio ANFQ, juncta DS erit tangens, juxta ea, quæ *numer.* 2. generaliter demonstravimus. Et si supponatur QBC esse Ungula plano semiquadrantaliter inclinato abscissa, seu eadem, ac figura sinuum inscripti quadrantis BCI, quem axi parallela SL secet in G, tangat verò in eodem puncto G K, erit tum FD æqualis KG; demisso enim sinu GE, ac jun-

ćto

cto radio G B, quemadmodum S F æquatur sinui G E, erit F N æqualis sinui G L, seu E B; est autem superficies A N F Q æqualis radio B C, vel B G in ipsam E G, vel B L (uti constat ex eadem Propositione quinta, vel ex decimaquinta particulatim acceptis) itaque rectangulum N F D æquatur ipsi B G E; porrò hoc æquale est E B in K G, propter G B ad E B, ut K G ad G E; itaq; N F D æquatur E B in K G, suntque

* *Deficit in Diagrammate linea B G radius quadrantis, de quo in præsenti Demonstratione.*

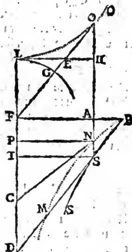
N F, E B æquales; ergo & F D æqualis erit tangenti G K; eidemque quantitati æqualis erit (idest semper erit D F ad F Q, ut tangens ad arcum lineæ Q F congruentem antequàm in planum evolveretur, uti est hic arcus G I) etiam si Ungula semiquadrantalis non sit, curvarum enim eumdem axem, & ordinatas proportionales habentium, eadem est, respectu ejusdem à vertice altitudinis, constans subtangens F D.

5 Quinimò & si Ungula non ex circulari cylindro, sed ex parabolico, hyperbolico, aut alterius generis curvæ insistente resecta foret, eadem posterior constructio locum obti-

tineret, quippe & in illis hoc semper evenit, ut (si fuerint semiquadrantales, idest inclinatione semirecta abscissæ) inscripta figura genitrice (quæ cylindri basis erat) BCGI; ductaque axi parallela qualibet SGL, erit SL æqualis arcui curvæ GC; nam & tota BQ æqualis est curvæ IGC, circa quam in cylindro convolvebatur; & portio QF æqualis portioni IG, utpote suscipiens ordinatam FS æqualem sinui GE, cui æqualis erigebatur in superficie cylindrica ad punctum G nondum expansa, adeòque & reliqua FB, seu SL æqualis reliquæ portioni GC; His itaque existentibus, ductaque ad punctum G tangente genitricis curvæ GK, atque huic posita æquali FD, oportet, junctam DS tangere curvam Ungulæ sic expansæ, etenim hinc inde ductis parallelis VPHmRT axi propiori, hupmrt remotiori, secantibus lineas, ut in figura videre est; cùm sit DF ad HV, vel hu, ut FS ad SH, seu Sh, vel KG ad tangentem Gm, posita jam DF æquali KG, erit prædicta Gm æqualis HV, seu hu; verùm propter SL, seu HT, vel ht æqualem curvæ GC, & PT, vel pt æqualem RC, seu rC, erit HP, vel hp æqualis curvæ GR, vel Gr: estque RG minor, sicut è contra rG major tangente mG; itaque HV major est quàm HP, minor verò hu, quàm hp; & utrobiq; puncta V, u rectæ DS ultrà curvam QPSpC: tangit ergo, uti propositum fuerat; eademque FD subtangens erit omnium aliarum Ungularum etiam non semiquadrantalium, propter ordinatas ad eadem axis puncta F semper proportionales.

6 Quanta hinc, Deus bone, Veritatum seges enascitur! At mihi non in hoc campo seritur, metiturve, antequàm aliàs promissum Sphærocylindricarum Sectionum tractatum invulgem; Unum hoc non dissimulabò ad Logisticam pertinens, quo simul usum doctrinæ quadantenus insinuabo, Nimirùm, superficiem ex Logistica circa axem revoluta finitam esse, uti supra *capite præcedenti, num.* 12. & 13. jam monuimus, ex quò Ungula semiquadrantalis ex cylindrico super Logisticæ curva erecto æqualis foret spatio hyperbolico ibidem designato, hinc etiam spontè profluere. Esto enim

enim talis Ungula cylindrica in planum extensa FBSS, cum inscripta sibi Logistica genitrice FBNM; ducta igitur axi parallela ANS, erit ubique AS æqualis curvæ BN,

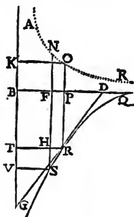



& tangens Ungulæ ad punctum S erit SD, itaut DT subtangens æqualis sit tangenti NC Logisticæ ad punctum N; æqualis est ergo potentia DS, tum tangenti CN (idest ordinatæ AO in spatio hyperbolico, quod loco citato determinavimus) tum ipsi TS, seu FA; itaque juncta FO erit æqualis ipsi DS, sed & inter easdem parallelas consistunt; æquidistat igitur FO tangenti DS; & hoc semper; figura igitur FLOO est correlata Ungulæ FBSS; illique proptepterea est æqualis integrè, & particulatim, juxta doctrinam *cap.* 8. *num.* 3. Immò & hoc ipso ratiocinio generaliùs concepto, posset è contra eadem de Ungularum tangentibus determinatio in omnibus demonstrari. Hinc enim habetur, figuram ex tangentibus CN ad FB applicatis esse Correlatam

Un-

Ungulæ FBSS (quæcumque fuerit curva B N M) atque adeò tangentes Ungulæ esse parallelas ramis figuræ ex ipsis CN, cui integrè, & particulatim correspondet ex dictis *cap. præced. num.* 12. illationem firmantibus iis, quæ *cap.* 8. circa finem *num.* 5. monuimus.

7 Jam & illud observandum volo, quòd ex secunda hujus Hugeniani Theorematis parte manifestò liquet, solidum hyperbolicum ex spatio O P Q R circa O P rotato esse ad solidum ex spatio Logisticæ correspondente T R Q B circa B Q




in eadem semper ratione, in ea videlicet, in qua parallelogrammum hyperbolæ inscriptum K O B P ad quadratum subtangentis Logisticæ T G; quoniam enim spatia hyperbolica lineis O P abscissa à termino Q R proportionalia sunt axi parallelis P R in trilineo Logisticæ R Q P, si cylindricus excitetur super spatio O P Q R, idemque secetur plano per O P transeunte, ad basim semiquadrantaliter inclinato, erit cylindricus ejusmodi ad truncum inferiorem, plano secante, & basi interceptum, ut parallelogrammum R P Q ad trilineum Q P R (id quippe convincit demonstratio, qua in Vivianeis

usus sum ad Proposit. septimam, *pag.* 52. propositam, ubi ostendi, cylindrum ex ductu quadrati a c, in figura loco citato adhibita, in Expansam superf. sphericæ I Z A C, esse ad truncum ex triangulo I C I in eamdem, ut quadratum, seu parallelogrammum c a l i, Expansæ inversè positæ i d a circumscriptum, ad talem Expansam; quippe id ex hac sola affectione pendebat, quòd esset semper A Z I C ad partem F Z A C, ut linea a c, seu R P ad P d, prout in aliis benè multis figuris, ac præcipuè in casu nostro verificatur) similiter in eadem ratione rectanguli R P Q ad trilineum Q R P,

erit etiam cylindricus super basi Q B T R erectus, ad truncum inferiorem, interceptum eadem basi, ac plano similiter per B Q inclinato, eò quòd partes etiam spatii Logistici Q B T R per ordinatas à termino T R abscissæ, proportionentur lineis in eodem trilineo Q R P basi P Q parallelis, uti ex primo Hugenii Theoremate, ac dividendo, constat, sunt enim tales parallelæ differentiæ ordinatarum ad cavam Logisticam, veluti spatia sic intercepta differentiæ spatiorum iis ordinatis proportionalium; est igitur cylindricus super

O P Q R,

OPQR, cujus altitudo PQ ( ob semiquadrantalem inclinationem plani secantis ) ad suum truncum inferiorem, ut cylindricus super BTRQ, altitudine BT, ad similem sui truncum, & sumptis consequentium æquè proportionalibus ( est enim quivis truncus ad rotundum solidum ex basi circa eamdem lineam, quæ est basis, & plani secantis communis sectio, rotata, ut radius ad circumferentiam, ut *cap.* 10. circa mediũ *num.* 1. ostendimus ) erit cylindricus hyperbolicus ad rotundum ex OPQR circa OP, ut cylindricus Logisticus ad rotundum ex sua basi circa BQ; ac permutando, ut ille cylindricus ad istum, ita illud rotundum solidum ad hoc, quod ultimò expressimus. Verùm illi cylindrici in composita sunt ratione altitudinum PQ ad BT, seu, sumpta communi latitudine TG, PQ in TG ad GTB, & basium, scilicet spatii hyperbolici, quod æquatur ex dictis suprà *num.* 3. rectangulo OPD, ad spatium Logisticum, quod æquale est ex sæpe dictis rectangulo PQ in TG; itaque & rotunda solida supra descripta, Hyperbolicum ad Logisticum, in composita erunt ratione, rectanguli OPD ad PQ in TG, & hujus ad GTB, idest, ut OPD ad GTB, quæ denique cùm componatur ex PD ad BT, seu PR, vel dicas ex TR, seu BP ad TG, & ex OP ad eamdem TG, dabit rationem rectanguli hyperbolæ inscripti OPBK ad quadratum subtangentis Logisticæ TG. Quod erat demonstrandum.

8 Quarta pars demonstratione non indiget, sed prolixiorum, quàm apud nos sint, tabularum Logarithmicarum calculo, quippe assignato longitudini subtangentis Logisticæ numero, per quem Hugenius hyperbolæ parallelogrammũ designat, tunc distantia duarum ordinatarum Logisticæ exhibebit Logarithmum rationis earumdem ordinatarum ( juxta naturam hujus curvæ *cap.* 1. *num.* 3. indicatam ) seu differentiam Logarithmorum respondentium numeris, inter quos est ordinatarum Logisticæ, ac consequenter & ordinatarum hyperbolæ, ratio, unde cùm sit subtangens ad intervallum ordinatarum Logisticæ, ut parallelogrammum hyperbolæ ad congruum spatium hyperbolicum; ideò per Logarithmicas tabulas facilè erit hinc æstimare, & calculo eruere numerum cor-

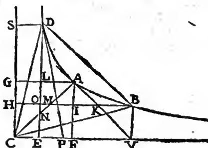
Z 2 ref-

respondentem cuilibet dato hyperbolico spatio, data ejus extremarum ordinatarum ratione.

9 Quinta similiter Theorematis pars, pertinens ad Tetragonismum Hyperbolæ à Clarissimo Auctore in Tractatu de Evolutione curvarum exhibitum, vel de modo quadrandi hyperbolam per rectificationem curvæ parabolicæ intelligenda est, vel per Logarithmos; utrumque enim in præfato libello insinuatum video; si primum, jam ex *cap. præcedenti*, *num.* 14. habes hyperbolicum spatium æquale esse rectangulo ex Logisticæ subtangente, seu generaliùs, ex semitransverso latere hyperbolæ in curvam parabolicam, dupla parametro descriptam, iisdemq; axi parallelis terminatam. At si (quòd aptiùs judicarim) de altero modo per Logarithmos accipienda sit, quemadmodùm & præcedens pars, solo calculo indiget, ac ingentium Logarithmorum tabulis, quæ etsi mihi in promptu essent, vereor, ut otii, & patientiæ satis habiturus sim, ut ejusmodi calculum expenderem, quem idcircò laborem his, qui se ejusmodi studiis exercere voluerint, integrè, & ultrò relinquam, siquidem tempus admonet, ut receptui canam, ac Philosophiæ me restituam; ipsum tamen locum ab Hugenio hìc citatum, ex ejus Tractatu de Linearum Evolutione *pag*. 75. Jacobi Panzanini Viri Cl. aliàs abs me infra meritum laudati opera descriptum (quippe exemplari carebam) hìc subjungere non gravabor, ne quid Lectoribus desit ad hanc Logisticæ proprietatum ab Hugenio propositarum demonstrationem illustrandam. Inquit igitur Hugenius:

10 *Quæcumque verò Problemata ad alterum è duobus hisce reducuntur, quamlibet vero proximam solutionem per numeros accipiunt, Logarithmorum admirabili invento. Cùm per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quàm proximè explicetur; est autem regula hujusmodi. Sit D A B portio hyperbolæ, cujus asymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis asymptoto S C. Accipiatur differentia Logarithmorum, qui conveniunt numeris, eamdem inter se rationem habentibus, quā rectæ D E, B V; ejusque differentiæ quæratur Logarithmus, cui addatur Logarithmus hic (qui semper est idem)* 0, 36221, 56887. *Summa erit Logarithmus numeri, qui spatium*

*D E*



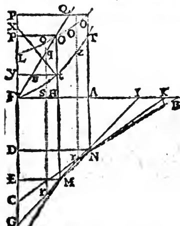

*DEVBAD designabit, tribus rectis, & curva DAB comprehensi, in partibus, qualium parallelogrammum DC est* 100000, 00000. *Unde porrò facilè quoque habebitur area portionis DAB. Sit exempli gratia proportio DE ad BV ea, quæ* 36 *ad* 5.

| | | |
|---|---|---|
| *Ab* | 1,55630,25008 | , *Logarithmo* 36. |
| *Auferatur* | 0,69897,00043 | , *Logarithmus* 5. |
| *Erit* | 0,85733,14965 | , *Differentia Logarithmorum.* |
| *Et* | 9,93314,92856 | , *Logarithmus differentiæ.* |
| *Cui addatur* | 0,36221,56887 | , *Logarithmus semper addendus.* |
| *Fit* | 10,29536,49743 | , *Logarithmus spatii DEVBAD* |

*Habebit hujus Logarithmi numerus* 11 *caracteres, quum characteristica sit* 10. *quæratur itaque primò numerus proximè minor, conveniens invento Logarithmo, qui numerus est* 19740. *Deinde ex differentia Logarithmi ejusdem, & proximè eum in Tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur* 81026, *scribendi post priores, ut fiat* 197408, 10260, *addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterũ* 11, *est ergo area spatii DEVBAD proximè partium* 197408, 10260, *qualium partium parallelogrammum DC est* 100000, 00000.

Hæc

Hæc Clariſſimus Hugenius, cujus inventis circa hyperbolæ quadraturam, neſcio an opportunum fuerit è meditationibus noſtris aliquam ad idem propoſitum ſubnectere. Ea eſt, quòd, ſi intelligatur curva B N M eſſe Tractoria, cujus prima




ordinata F B, axis F G, ſitque B vertex, F centrum hyperbolæ æquilateræ, cujus ſemitranſverſus axis F B: ducta ex quovis puncto H axi Tractoriæ parallela H M, erit triangulum, baſi F B, altitudine H M, æquale hyperbolico trilineo, axis portione H B, tangente hyperbolam ex puncto H, & curva intercepta hyperbolæ comprehenſo, uti ex noſtra doctrina de Figuris Correlatis deduci poteſt. Atque hìc eſto noſtræ

HUGENIANORUM THEOREMATUM CIRCA LOGISTICAM DEMONSTRATIONIS

FINIS.



# LECTORI
## S.

*Visum fuit Appendicis loco hic subnectere Epistolam Geometricam, dudum scriptam ad Virum Clariss. Thomam Cevam, & Poeticis, & Geometricis Opusculis Celeberrimum, tum quia simili, & uniformi cum praecedentibus stylo procedit, tum quia pluribus in locis doctrinas à nobis superiùs traditas illustrat, & variis exemplis applicat, tum quia num.* 19. *non contemnendam animadversionem continet ad hujus Tractatus argumentum spectantem, de* Logistica *scilicet ex quodam cylindro resecta; quam aequum fuerat his* Hugenianis *circa* Logisticam *meditationibus subnectere. Vale.*



# EPISTOLA
## GEOMETRICA
### *AD VIRUM CLARISSIMUM*
# THOMAM CEVAM
### SOCIETATIS JESU.

*Nostra Doctrina de Conicæ superficiei dimensione per P. Cevam ex Pappo confirmata. Spiralium diversi generis origo. Quælibet Conica superficies quomodo in planum explicanda, & quævis plana figura quomodo Cono advolvenda. Quarumvis linearum in Coni superficie descriptarum Ichnographias determinare, & datis Ichnographiis, lineas in Coni superficie iis respondentes reperire. Curvarum transformatio, ad illas comparandas utilis. Ichnographiarum omnium, linearumque ex Coni superficie in planum explicatarum tangentes duplici methodo inventæ. Nova ejusdem supradictæ nostræ doctrinæ confirmatio. Ad Cono cylindricæ Spiralis extensionem in planum,*

 osten-

*ostenditur Spiralis Archimedeæ, & Apollonianæ Parabolæ æqualitas. Quorumdam lapsus notati. Infinitarum Parabolarum, & Spiralium comparatio. Novus Cycloidem rectificandi modus. Transversa cylindri Cycloidalis sectio Parabolæ æqualis, Ungula quoque nil nisi Parabola complicata esse dignoscitur. Rotunda superficies ex Cycloide circa basim, dupla ejus, quæ ab ipsa circa tangentem verticis rotata producitur. Cylindrum invenire, cujus transversa Sectio propositæ cuilibet curvæ sit æqualis, & Ungula in quamlibet figuram datam explicetur. Ex cylindro Tractoriæ secanda est Logistica. Curva Conocylindrica Spiralis cuidam Parabolæ, longitudine, non positione, æqualis est. Dimensio superficiei cylindricæ, utrique spirali, & axi Coni interjectæ. Si Spiralis fuerit Geometrica, explicata illa cylindrico-spirali superficie, in rectam expandetur.*



PRÆ-



PRÆSTANTISSIMO GEOMETRÆ,
AC VATI ELEGANTISSIMO

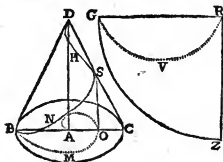
# P. THOMÆ CEVÆ

E' SOCIETATE JESU

*D. Guido Grandus Monachus Camald. S. P.*

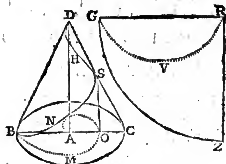
EX quo me litteris tuis decorare cæpisti, Vir in paucis Cariſſime, nullas, aut mihi magis jucundas, aut Geometrica eruditione magis refertas accepi, iis ipſis, quas XVI. Kal. Julii ad me deſtinaſti. In his, pari humanitate, ac ingenio, doctrinam ſecundæ Propoſitionis Appendicis meæ ad Vivianeorum Problematum Demonſtrationem illuſtrare aggrederis,& minimè contemnēda animadverſione confirmare, oſtendens ipſam cum Pappo Alexandrino conſentire, & ad novas rurſus ſpeculationes viam ſternere poſſe. Sic enim habes, totidem penè verbis tuis latinè redditis.

1 *Eſto Conus rectus D B C, cujus triangulum per axem ſit*




*D B C, baſis verò circulus B M C: intelligatur latus D B, pun-*

*cto D fixo manente, altero extremo B per circumferentiam præfatæ basis B M C æquabiliter circumferri, eodemque tempore punctum B, æquabili pariter velocitate, ex B per lineam B D ascendere, describens in Coni superficie Spiralem B S D; adeò ut eodem momento, & latus B D se in situ B D restituat, &*




*punctum B ascensus sui terminum D attingat, ubi & Spiralis B S D terminus erit. Manifestum est, Coni superficiem, si evolvatur, & explicetur, in circuli sectorem abituram, qualis est R G Z, cujus semidiameter R G lateri D B æqualis erit, & arcus G Z circumferentiam B M C B adæquabit. Notum pariter est, Spiralem Conicam B S H D in planum extensam, Spiralis Archimedeæ portionem G V R evasuram. Consideretur jam Spiralis Conica B S H D, in qua sumpto quolibet puncto S, demittatur ad basim perpendicularis S O: idem ex omnibus ejus punctis factum intelligatur; manifestum erit, Ichnographiam prædictæ lineæ fore integram Spiralem Archimedeam, ut liquet in triangulo D A C, in quo C D ad D S in eadem ratione est, in qua semidiameter C A ad A O; idemque in quovis alio per axem triangulo dicendum erit, quare incrementa, & decrementa ipsius A O erunt in ratione temporum, &c.*

2 *Hoc posito, (per Coroll. 2. Appendic. tuæ Vivian. Probl.) erit, ut D B ad semidiametrum B A, idest, ut tota superficies Conica B C D, vel extensa R G Z, ad circulum B M C, ita spa-*

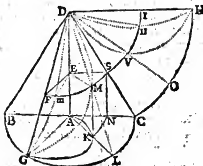
*tium*

*tium superficiei Conicæ BSHDB, idest Spirale segmentum GVR, ad spatiũ, integra Archimedis Spirali contentum, BOAB, & permutando, erit sector RGZ ad segmentum GVR, ut circulus BMC ad integrum Spirale spatium BOAB; proptereaque sector RGZ triplus erit segmenti Spiralis GVR; id quod verissimum est, per Prop. 21. lib. 4. Pappi. Unde hac Geometrica confirmatione doctrinæ tuæ novum robur accedit.*

3 *Ponamus jam, lineam GVR esse circuli semicircumferentiam, sectorem verò RGZ circularem quadrantem, qui duplus erit semicirculi RVG. Convolvatur prædictus sector, itaut in superficiem Conicam abeat DBC, & peripheria BMCB æqualis sit arcui quadrantis GZ; manifestum est, quòd semiperipheria GVR circa conum convolvetur, veluti BSHD, & in D terminabit; notum pariter est, Ichnographiam ejusdem lineæ fore Spiralem, ab Archimedea specie distinctam, quæ (ex Coroll. citat.) spatium comprehendet, quod ad circulum sit, ut 1. ad 2. Quoniam verò loco semicirculi GVR substitui potest quælibet portio, parabolica, hyperbolica, &c. habebimus in earumdem Ichnographiis infinitas Spirales lineas, genere longe diversas, &c. Quæ quidem omnia tibi sat nota coniicio, ex ejusdem Propos. Coroll. 6. nec difficilis tibi erit modus ejusmodi Ichnographias omnes determinandi, quarum tamen constructiones, si quæ ex omnibus magis simplices, & expeditæ videantur, utì & generalem methodum ad ipsarum tangentes ducendas, si communicaveris, rem oppidò gratam, & acceptissimam facturum te scias, &c.*

4 Quid igitur mihi, & olim hoc argumentum, & nunc maximè, tuis excitantibus litteris, rursus speculanti in mentem venerit, candidè aperiam; ut verò etiam geometrica supellectile non ultra mediocritatem instructis, in quorum manus Epistola hæc mea incidere aliquando poterit, manifesta esse possint quæcumque hìc inserere placuerit, ea ipsa etiam demonstrabo, quæ apud te demonstratione non indigent, quale est illud, quod tanquam notissimum, & vulgò obvium videris ipse supponere (à quo & initium auspicabor) nempe quomodo Coni recti superficies intelligi possit in planum evolvi, & explicari, aut contrà plana quælibet superficies in Co-

Coni cucullum detorqueri. Esto Coni recti superficies ( integra, an dimidia, aut duobus per axem planis intercepta, perinde est ) DGC in planum explicanda. Centro D, intervallo DC lateris coni, describatur plani circuli portio DCH; sitque, ut DC ad CA radium basis coni, ita reciprocè angulus GAC inclinationis planorum, superficiem conicam, quæ explicanda occurrit, intercipientium ( vel ita 4 anguli recti in superficie integra, seu duo tantùm in dimidia ) ad angulum CDH. Dico sectorem CDH esse ipsammet superficiem




conicam DGC in planum evolutam; quia enim arcus eidem angulo subtensi sunt, ut radii, & qui ab eodem radio describuntur, sunt, ut anguli, ideò duorum quorumlibet arcuum proportio erit ex rationibus radiorum, & angulorum composita, quæ si reciprocæ fuerint, ut in casu nostro, rationem dabunt æqualitatis; æqualis est igitur arcus CH ipsi CG; ductis verò ex eodem puncto S radii, seu lateris DC, arcu SI ipsi CH concentrico, & SF in coni superficie, ubi per planum basi parallelum FES secatur; constat, arcum GC ad FS in ea ratione esse, in qua radius AC ad ES ( ob communem angulum inclinationis planorum, quibus uterque intercipitur ) scilicet, ut CD ad DS, vel, ut arcus CH ad SI;

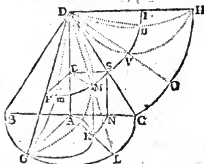
sunt

ſunt autem antecedentes, nempe arcus G C, C H æquales; ergo & conſequentes F S, S I æquales erunt; atque ita ſemper; cùm igitur omnes arcus ſectoris C D H æquales ſint omnibus, & ſingulis arcubus ſuperficiei conicæ D C G, illos comparando, qui per idem lateris coni punctum tranſeunt, iiſdem applicati omninò congruent; quare ſi ſector complicari circa conum intelligatur, arcus C H congruet arcui C G; & puncto H in G poſito, non poterit non congruere radius D H lateri æquali D G, unde punctum I ſuperponetur ipſi F, & arcus S I congruet eidem S F ſibi æquali, totuſque ſector toti ſuperficiei conicæ reſpondebit, & circa ipſam convolvetur, ſive in ipſam abibit; unde viceverſa, conica ſuperficies D G C evoluta, in eumdem ſectorem C D H explicabitur.

5 Quòd ſi linea, conicam ſuperficiem terminans, fuerit, non alterum coni latus, ſed curva quælibet G M D, non admodùm diverſa conſtructione intentum obtinebimus, quippe invento, ut priùs, arcu ſectoris C H æquali extremo arcui C G datæ ſuperficiei conicæ, ad quodlibet lateris coni punctum S ducto arcu S M in plano baſi parallelo, ponatur arcus S V ipſi C H concentricus in eodem plano, æqualis autem arcui S M, facto ſcilicet angulo S D V in eadem ratione ad M E S, in qua radius S E ad S D (quæ ratio eadem ubique eſt, nimirum radii baſis A C ad latus coni D C) atque ita porrò fiat, quouſque compleatur figura D V H, quæ apta nata erit datæ conicæ ſuperficiei D M G congruere, eodemque argumento probabitur eſſe ejuſdem in planum evolutæ figura.

6 Hinc colligitur (deſcripta curvæ G M D Ichnographia G K A, extenſoque latere D M L, juncto radio A L, radio D V O, & arcu K N) fore ſemper angulum G A C ad C D H, ut M E S, aut K A N ad S D V, & permutando, G A C ad K A N, ſeu L A C, ut C D H ad S D V, vel C D O, aut arcum G C ad C L, ut H C ad C O; unde evoluta conicæ ſuperficiei ſic etiam haberi poſſet, nimirum, invento priùs ſectore C D H, congruente conicæ ſuperficiei C D G, tum arcubus G C, C H ſimiliter diviſis in L, & O, junctiſque radiis A L, D O, ita hunc ſecando in V, ut ille ab Ichnographia ſecatur in K, quouſque per puncta D V H tranſeat linea, deter-

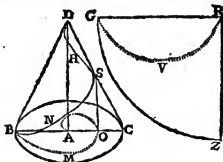
terminans superficiem quæsitam D V H C, est quippe, ut L A ad A K, ita C A ad A N, seu C D ad D S, O D ad D V, existentibus arcubus H C, C O ipsis G C, C L proportionalibus, ut ostendimus ex puncto curvæ V per superiorem modum quæsito.




7 Unde è contrario data figura D V H C circa conū D C B complicanda, ut evadat D M G C, facilè habebimus ejus Ichnographiam, facto priùs angulo G A C ad datum C D H sectoris, datæ figuræ adscripti, ut C D ad C A, sectisque similiter in L, & O arcubus G C, C H, necnon radio A L in K, ut O D dividitur à datæ figuræ perimetro in V: tunc enim punctum K erit in figuræ G K A C, ichnographiā quæsitam determinantis, perimetro. Quæ autem de superficie conica G M D C, seu de ejus evoluta C D V H, respectu Ichnographiæ A K G C dicta sunt, eadem, ut constat, valent de residua coni superficie G M D, ejusve evoluta D V H, respectu ejus Ichnographiæ G K A, quas propterea ex præmissis modis alterutro facilè determinabis, qualescumque fuerint curvæ propositæ; & si linea V H, vel u H recta fuerit, constructionē habebis, ducendi in conica superficie lineam G M, seu G m, omnium data puncta G, M (non in eodem latere, nec in plano basi parallelo posita) conjungentium *Brevissimam*, ejusque Ichnographiam describendi.

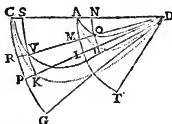
Quo-

Quomodo utcumque satisfactum puto quæstioni, quam moves, determinandi scilicet Ichnographiam figuræ tuæ G V R




circa conum D C B convolutæ, sive illa sit semicirculus, sive parabola, sive hyperbola, aut alterius cujuslibet generis curva extiterit, unde dabuntur infinitæ illæ Spiralium species in his Ichnographiis, quas mente jam comprehendisti. Verùm nescio an operæ pretium sit elegantiorem, quam mox subdo, constructionem illarum attendere.

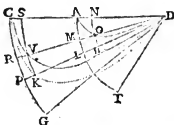
8 Esto figura quælibet in Conum convolvenda, aut ex ipso in planum explicata C V D, & sector illi circumscriptus




(inscriptusve si cava fuerit) D G C; oportet determinare lineam, quæ ejus convolutæ Ichnographiam clauderet in basi coni dati radii D A, qui minor sit radio sectoris D C. Fiat

 su-

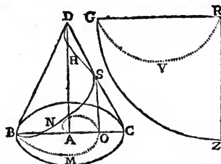
ſuper D A figura A O D ſimilis, & ſimiliter poſita ipſi datæ C V D ( ſecto nimirum quovis ramo D V in O proportionaliter, ac ſecetur C D in A, & per puncta A O D ducta linea) & centro D ducto quovis arcu N O H, fiat ſemper H N ad N O in conſtanti ratione lateris coni C D ad radium baſis D A; ajo, puncta H ad Ichnographiã A H D, propoſitæ curvæ C V D reſpondentem, pertinere; erit enim angulus L D A ad R D C, ut radius C D ad D A, unde arcus C R æqualis erit arcui A L;




quando igitur ſector C G D, cum inſcripta figura C V D, convolvetur circa conum baſis A D T, arcu C G congruente ejuſdem baſis arcui ſibi æquali A T, portio C R congruet ipſi A L, & latus D R, cum puncto V curvæ C V D, per quod tranſit, erit ſuperimpendens radio D L, in quo propterea erit punctum ichnographicè ſubjectum puncto V dictæ curvæ; debet autem in eadem ratione diſtare punctum ichnographiæ à centro baſis D, reſpectu radii D L, in quo reperitur, ac diſtet punctum V in latere coni D R à vertice D ( ob ſimilia triangula effecta à perpendiculo, ex punctis curvæ in ſuperficie conica exiſtentis ad baſis Ichnographiam demiſſo, qua ratione in præcedenti figura eſt C A ad A O, ut C D ad D S ) itaque cùm ſit, ut latus D C ad radium baſis D A, ſeu D L, ita V D, diſtantia puncti V in ſuperficie conica à vertice D, ad D O, ſeu D H, diſtantiam puncti H à centro baſis, erit punctum H, & alia omnia ſimili modo determinata, ad curvam ichnographiæ, quæ quærebatur.

9 E con-

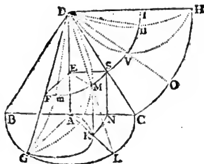
9 E converso, data ichnographia, lineam ipsi in cono respondentem in plano determinabimus; sit enim talis Ichnographia A H D, & radio D A extenso in C, ut D C æqualis fiat lateri coni propositi, super ipsa fiat figura C K D similis, ac similiter posita datæ A H D; & ducto ex centro D quolibet arcu S K, ita dividatur in V, ut sit K S ad S V, ut latus coni C D ad radiū basis D A; erit punctum V in linea C V D quæsita, quæ in superficie conica impendet datæ ichnographiæ A H D; nam recalcatis præcedentis demonstrationis vestigiis, ostendentur arcus C R, L A æquales, unde applicati congruent, & punctum V superimpendebit ipsi H, quippe tantumdem in latere D R proportionaliter à vertice distans, quantùm H in radio à centro D; Vnde facillima habetur constructio, nedum Ichnographiæ in tua figura, ubi




G V R convolvenda supponatur semicirculus (alio enim semicirculo super radio basis facto, & in arcus concentricos basi resoluta, oportet singulorum arcuum dicto semicirculo comprehensorum quadruplos determinare, & per eorum extrema curvam ducere, erit enim coni latus radii basis quadruplum, uti quatuor anguli recti quadrupli sunt unius subtensi à quadrante G R Z) sed & ubi supponatur parabola, aut hyperbola [ facta nimirum simili constructione, & ex concentricis peripheriis tali parte determinata, quæ ad arcum, radio, & simili parabola, aut hyperbola super ipsum descripta conclu-

ſum, ſit ſemper in data ratione lateris coni ad radium baſis) At è contra ſi cupias Ichnographiam circularem, parabolicam, alteriuſve figuræ habere, manifeſta erit, conſtructio figuræ, quæ cono advoluta ejuſmodi Ichnographiam dare nata eſſet, per ſectionem arcuum concentricorum, peripheria ſimilis figuræ ſuper latere coni deſcriptæ, ipſoque coni latere comprehenſorum, in eadem ratione data, lateris coni ad radium baſis. En quanta curvarum ſeges, quas geometricè determinare poſſumus, quotieſcumque data ratio, lateris coni ad radium baſis, poteſt geometricè angulis applicari, vel per multiplicationem, vel per diviſionem arcuum propoſitorum.

10 Hinc in meo Sphærocylindricarum, & Conocylindricarum ſectionum Tractatu oſtendi, quòd, ſi conus B D C ſecari intelligatur ſemicylindro, cujus baſis ſemicirculus G K A



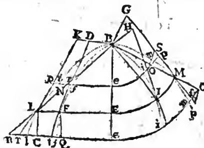

ſuper radio baſis A G deſcriptus, ſitque latus coni duplum verbi cauſa radii baſis, ſeu in quavis alia ad ipſum ratione, facto ſuper D H, æquali lateri coni, ſemicirculo pariter D V H, omnibuſque arcubus V I, centro D deſcriptis, bifariam, ſeu in data ratione ſectis ad puncta u, itaut ſit V I ad u I, ut D C ad C A, linea D u H, per puncta u ſic inventa tranſiens, erit æqualis cono-cylindricæ ſectioni; id quod etiam ſuccedet,

det, si loco semicirculorum G K A, H V D, ponantur quævis aliæ similes figuræ, semper enim communis conicæ, & cylindricæ superficiei sectio in lineam planam illi æqualem commutabitur; cùmque in Vivianeis *pag.* 122. paulò ante *num.* 37. ostenderim, lineam quoque Sphærocylindricam, seu perimetrũ Veli Florentini, esse communem conicæ, & cylindricæ superficiei sectionem, quam etiam *num.* 41. *p.* 136. ostendi æqualem perimetro cujusdam ellipsis, ideò etiam curva D u H, modo præscripto efformata, cuidam ellipsis circumferentiæ æqualis ostendetur. Vides autem, opinor, quàm utile sit eamdem lineam ex variis superficiebus in alias transferre, diversisq; constructionibus in plano determinare, prout eadem linea elliptica, tum modo superiùs descripto, tum per modum ungulæ ex cylindro expansæ, tum vulgari modo, prout Apollonianam coni sectionem terminat, aliisq; modis in plano jacere potest, semperque diversas tangentium determinationes suscipit, pro vario suarum partium situ; contingere siquidem potest, ut in uno rectificationem respuens, in altero illam admittat, vel saltem cum alia nota linea comparationem suscipiat. Sic, si proponatur linea L O O, cujus hæc proprietas, ut ducto radio F O ex determinato puncto F, secante arcum L G, ejusq; tangentem L E in punctis G, E, sit semper post F G radiũ, & secantem F E, tertia proportionalis F O, facile erit curvam L O O cum linea Geometris jam satis nota comparare, videlicet cum parabola notæ parametri; siquidem illa ipsa non alia est, quàm parabola evoluta ex superficie coni, cujus triangulum per axem sit æquilaterum; id quod extra hanc methodum, nescio an satis promptum esset conjectura assequi, nedum facili geometrica constructione determinare.

11 Jam, quando ita provocas, operæ pretium est, ut curvarum, eo, quem præmisi, modo descriptarum, tangentes universali methodo determinare aggrediar, pro quo: assumatur quælibet figura A L L B, ductisque ex centro A quibusvis concentricis arcubus E L, E L, similiter augeantur producti in M, aut minuantur divisi in I, quousq; per puncta A M M B transeat curva, qualem *num.* 8. determinavimus, aut per puncta A I I B transeat curva, qualem *num.* 9. descripsimus; quæratur que ad datum punctum M, vel I curvarum ejusmodi tangens. Ducto arcu quolibet, verbigratia extremo B C D, occurrente junctæ chordæ, seu radio A M, A I in D, H, ductoque arcu M L, seu I L, & juncta chorda A L, secante priorem arcum in C, ducantur tangentes arcus D B ad puncta D, H, C, quæ sint D G, H F, C K; huic ultimæ occurrat in K tangens L K ducta ex puncto L datæ figuræ A L B; in ea autem ratione, in qua sunt arcus L E ad E M, aut E I, ponatur esse data portio tangentis C K ad D G, vel H F. Dico junctam G M, aut F I esse tangentem ejusmodi curvarum in M, I. Si enim hæ curvæ gigni intelligantur ex æquabili motu lineæ A B circa A circulariter conversæ, & motu accelerato, vel retardato, prout opus fuerit, puncti B per B A ascendentis, aut A per A B descendentis (ad modum, quo Spirales generari solent) manifestum est, æquabilem illam velocitatem motus circularis in curva B M A tantò majorem, & in B I A tantò minorem fore, quàm sit in curva B L A, quantò major est arcus M E, & minor E I, quàm E L, idest ex constructione,

ne,

ne, quantò major est GD, & minor HF, quàm CK, eodem existente impetu puncti difformiter fluentis, sive in M, sive I, sive in L, propter æqualitatem ipsarum AM, AI, AL, vel residuarum DM, HI, CL, quas mobile punctum A, vel B intereà peregit, dum linea circulariter mota respectivè arcum DB, HB, vel CB emensa est. Si igitur velocitas difformis in puncto L curvæ BLA exprimatur per LC, etiam eadem velocitas in punctis M, I aliarum curvarum exprimetur per MD, IH illi æquales, & si velocitas æquabilis circularis motus exprimatur per CK ad curvam ALB (exprimenda verò est prorsus per ipsam, quoniam in ea est motus circularis directio, quippe tangens arcus CB, & aliunde intercipitur à tangente LK, angulo recto KCL opposita, in qua utriusque motus composita directio reperiri debet, ex 8. Prop. l. 2. Geometriæ motus Joannis Cevæ, qui non cognatione tantum, sed & geometrico acumine, & inveniēdi fœlicitate Tibi verè Germanus existit) similis æquabilis velocitas ad curvam AMB exprimetur per DG, & ad curvam AIB per HF; propterea juncta GM, & FI tangens erit, sive ex eadem propositione, sive ex his, quæ *cap.* 5. *num.* 3. demonstravi in Hugenianis, & antequàm Fratris tui Geometriam legerem, ex Torricellii loco ibidem citato deduxeram. Atque hinc est, quòd




si ordinatæ ad axem non sint arcus cōcentrici, sed rectæ lineæ, velut LE, FE in eadem semper ratione, ductis LC, FQ axi

axi parallelis, dataque figuræ B L tangente L r, occurrente basi in r; sumpta Q t, quæ sit ad C r in eadem ordinatarum ratione, juncta t F tanget curvam F B; tum enim illæ ordinatæ L E, F E, quemadmodùm & basis recta C Q e, habendæ sunt pro arcubus concentricis, à centro infinitè distante descriptis, cujus radii propterea sint ipsæ axi parallelæ L C, Q F, ipsæque r C, t Q pro tangentibus extremi circuli C Q e, ob infinitam ejus radii magnitudinem, in unam eamdemque rectam cum suis tangentibus abeuntis; cujus constructionis veritas jam aliunde innotuit, siquidem r L, t F hoc modo designatæ in unum & idem axis B E punctum collimabunt, uti ex proprietate triangulorum constat.

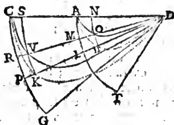
12 Quòd si quis malit independenter à motuum compositione easdem tangentes evidentiori methodo inquirere, per me licet. Esto enim primùm duplex figura, altera ex rectis L E, l e ad axem ordinatis, altera ex arcubus E M, e m ad eumdem axem applicatis, & respectivè æqualibus ipsis L E, l e sibi correspondentibus; data tangente L K prioris figuræ, occurrente ipsi B K, ex vertice ductæ æquidistanter ad ordinatas, in puncto K, tangens figuræ posterioris ad punctum M sic determinabitur; juncto radio B M, atque huic ex B perpendiculari B G, æquali ipsi B K, jungatur G M: dico hanc esse tangentem; occurrat enim in S cuilibet alteri ex arcubus concentricis e m, secanti radium in O; sitque O P radio B M

ex

ex O perpendicularis, ac juncta chorda B L, ordinetur per idem axis punctum e applicata prioris curvæ e T, secans tangentem in R, chordam in N; erit utique arcus e O æqualis e N, eò quòd sector sit triangulo analogus; sed & e m æqualis e l; itaq; & O m æqualis N l; ipsa verò N R æqualis O P, quia ad B K, æqualem ipsi B G, est in eadem ratione, L N ad L B, seu E e ad E B, aut O M ad M B; quæ omnia valent etiam de homologis lineis per minusculas litteras designatis, & infra punctum E ductis; hoc solo discrimine, quòd si e sit supra E, erit N R major, quàm N l; unde & O P major, quàm O m; multò igitur magis arcus O S ( qui est major ipsa O P, à fortiori quàm major sit suo sinu ) erit major, quàm O m; unde punctum S erit extra curvam; si verò e acceptum fuerit infra E, erit n r minor, quàm n l; undè & o p minor, quàm o m; arcus autem s o minor est tangente o p, à fortiori, quàm sua tangente minor sit arcus, quem ex centro B, juncta B p interciperet: multò ergo minor est arcu o m; & ideò etiam punctum s extra curvam erit; recta igitur G M tangit. Jam verò concipiatur alia curva B F priori analoga, itaut ejus ordinatæ F E ad ordinatas prioris L E perpetuò sint in eadem ratione, utiq; facta D B ad B K, ut F E ad E L, juncta D F hanc curvam tanget; siquidem si occurrat alteri ordinatæ in puncto T erit etiam T e ad e R, ut F E ad E L, nempe ut f e ad e l; quare cùm e R major sit ipsa e l, etiam e T major erit, quàm e f; si igitur intelligatur figura B i I ex arcubus E I æqualibus ordinatis hujus postremæ figuræ E F, juncto radio B I, atque huic perpendiculari B H, æquali ipsi B D, juncta H I tanget; eritque H B ad B G, ut I E ad M E. Duarum igitur figurarum, ex concentricis arcubus in eadem constanti ratione positis descriptarum, tangentes intercipiūt rectas ad radium perpendiculariter ductas, ipsis arcubus proportionales: Quod coincidit cum præmissa constructione.

13 Antequàm autem hinc aliò digrediar, adnotare juvabit, ex harum pariter curvarum descriptione doctrinam illam meã secundæ Appendicis ad Vivianea Problemata iterum demonstrari, seu denuò confirmari posse. Hinc siquidem deducitur, Ichnographiam cujusvis portionis ex conica superficie absum-

ptæ, qualis esset A H D, esse mediam proportionalem inter ipsam figuram conicæ superficiei in planum expansam, veluti D V C, & aliam ipsi similem, similiterque positam D O A, super radio basis coni descriptam; nam propter singulos arcus H N, se habentes ad N O in constanti ratione lateris coni C D ad radium basis A D, erit tota figura A H D ad A O D,



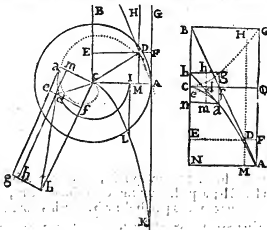

ut C D ad D A; sed C V D ad A O D sibi similem est, ut quadratum C D ad quadratum D A; itaq; C V D ad A O D est in duplicata ratione A H D ad A O D, propterea & conica superficies C V D ad Ichnographiam suam A H D est, ut A H D ad A O D, sive, ut latus coni C D ad radium basis D A. Quod &c.

14 Tu verò non hic subsistis, & alias rursus novarum speculationum fodinas eruere aggressus, Epistolis Tuis, pridie kal. Julij ad me datis, nova iterum ratione lineas in conica superficie descriptas in planum sternere niteris. Ais enim:

*Speculationem instituere placuit circa Spiralem illam conicam, de qua superioris hebdomadæ Tabellario ad Te scriptas Epistolas tradidi, cujus Ichnographia integra est Spiralis Archimedea; considerabam scilicet cylindricam superficiem, quam illæ perpendiculares efformant, quibus suffulta, ut ita dicam, distenditur prædicta Spiralis conica; scire autem optabam, in quam lineam evaderet, explicata in rectam lineam Spirali Archimedea, unà cum ipsa superficie cylindrica, ad conicam spiralem lineam terminante. Si enim hæc curvam aliquam è lineis aliàs notis referret,* ver-

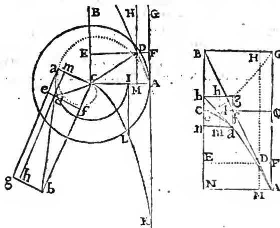
*verbigratia parabolam, id egregiarum certè Speculationum fodinam aperiret, &c.*

15 Id ego primo statim intuitu ad hyperbolæ quadraturam pertinere opinatus sum, nec me fefellit opinio, siquidem ad illam referri jam tum videbatur parabolicæ curvæ rectificatio, uti ex Hugenianis *cap.* 12. *num.* 14. constat, parabolæ autem rectificationem cum Spiralis Archimedeæ distensione conjunctam esse, tum ab aliis animadverteram ostensum esse, tum ipse postmodum docuisti ab Joanne Ceva fratre tuo Geometr. mot. l. 2. prop. 14. idem demonstrari. Anteà verò id mihi innotuerat hoc ratiocinio. Esto Spiralis Archimedea C a A primæ circulationis, & posito in altera figura Parabolæ Apollonianæ axe C N æquali dimidio circumferentiæ A D A,




ordinata autem N A æquali radio C A, describatur parabola C a A. Dico hanc Spirali æqualem esse; sumpto enim quolibet in parabola puncto a, & ordinata a n; & in spirali puncto a, cujus radius a c sit æqualis ordinatæ a n, ducatur arcus a l; ducanturque tam in parabola, quàm in spirali tangentes a b, occurrentes ipsi c b (perpendiculari hinc ad radium c a, illinc

ad ordinatam a n) in punctis b, b. Jam: cùm sit C b in spirali æqualis arcui a I (ut docuimus in Hugenianis *cap.5. nu.9.*) Sit autem peripheria A D A ad arcum I a in duplicata ratione A C ad C a, seu (in parabola) A N ad n a, videlicet, ut N C ad C n; sitque C N æqualis semissi peripheriæ A D A, erit & C n æqualis semissi arcus a I, vel subtangentis C b spiralis; sed & subtangentis n b parabolæ subdupla est eadem C n;

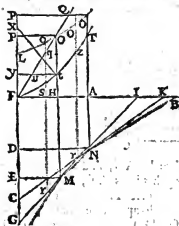



æquales igitur sunt, tum in spirali, tum in parabola subtangentes n b, C b; æquales autem & ordinata a n, & radius C a; tota igitur tangens parabolæ a b, quæ his potentia æquatur, æqualis erit tangenti a b spiralis sibi correspondenti; sumptaque infinitè exigua utrobique tangentis particula a d, ac dimissa in ordinatam, & radium subtangentis parallela d m, erunt triangula d m a, d m a utrobique similiter æqualia, applicatisque alterius ad alteram homologis triangulorum a m d lateribus, tangentes a d, seu curvarum partes his respondentes congruent, certè eò res deducetur, ut alterius ad alteram proportio sit propior æqualitati, quàm quælibet data majoris, aut minoris inæqualitatis ratio; æquales igitur sunt, tum Archi-

chi-

chimedea Spiralis, tum parabola quadratica nuper designata.

16 Hinc patet, quàm justò minorem Spiralem fecerint, qui semicircumferentiæ ADA æqualem esse asseruerunt, uti Sturmius Math. Enucl. l. 2. cap. 4. consect. 2. proposit. 17. Guarinus tract. 18. Eucl. Adaucti prop. 13. Rinaldinus de resol. & compos. pag. 299. aliique; videlicet tantò minorem, quantò axis NC parabolæ CaA minor est ipsa curva CaA; constat item à scopo non leviter aberrasse Virum Clarissimum Borellium, ubi de motu animal. p. 2. prop. 41. duas ejusdem Spiralis revolutiones comparans, ait illas ad invicem esse, ut peripheriæ mediæ arithmeticæ inter extremas cujuslibet Spiralis, sive esse ad invicem, ut sunt circulares zonæ, quibus inscribuntur; hoc enim perinde est, ac si diceret, curvam parabolicam tz esse ad tS (lineis æquali intervallo distantibus, axi parallelis interceptas) ducta recta FO secante præfatas parallelas in q, Q, ut trapezium QsHO ad OHSq, Quod est absurdum, sumptis quippe hyperbolicis spatiis OOsH, OHSO (iisdem curvæ portionibus correspõdentibus per *cap.* 12. *num.* 14. Hugenianorum) & permutando, esset QsHO ad inscriptū OOSH, ut OHSq ad circumscriptum OHSO, ideft ratio majoris inæqualitatis æqualis foret rationi inæqualitatis minoris.

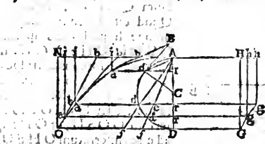



* *Hic pariter deficit littera* s *inter* H, *&* A.

Cæterùm eo modo, quo parabolam quadraticam, atque Archimedeam Spiralem comparavi, similiter alias spiralium species cum aliis parabolarum speciebus posse conferri manifestum est, uti aliàs, si satis memini, indicabam; nempe si radio-

diorum cujuscumq; helicis potestates denominatæ ab exponente $x$ sint inter se, ut angulorum, seu arcuum à radiis interceptorum potestates denominatæ ab exponente $y$, facta parabola talis naturæ, ut abscissarum quarumvis potestates denominatæ ab exponente $y$ sint, ut potestates suarū ordinatarum denominatæ ab aggregato exponentium $y + x$; spirali propositæ ita respondebit, ut si ultima ejus ordinatarū æquetur radio dictæ spiralis, axis autem sit $\frac{x}{y+x}$ totius circumferentiæ, illa Curva Parabolica, & ejusmodi Spiralis æquales erunt, ut ex methodo tangentium, tam parabolarum, quàm spiralium, *cap.* 5. *num.* 4. & 8. Hugenianorum tradita facilè constat.

17 Sed curvarum dimensionem tractantes quid vetat aliò paulatim digredi, quousque modum Cycloidem rectificandi tibi communicem, quem tibi acceptissimum fore video, quippe his geometricis venustatibus delectaris? En illum: esto Cyclois A a O, ordinatæ a r, a r, secantes semicirculum ge-



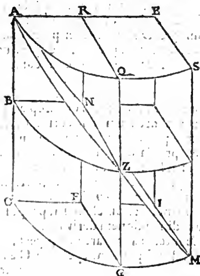

nitorem in d, d; extendantur chordæ A d, A d in f, f usque ad basim; applicenturque r g, r g his ipsis A f, A f æquales, ut oriatur hinc curva G g, quæ erit Hyperbola secundi gradus, sive, ut Cl. Viviano aliquando appellare placuit, *Mesolabica*, propter f A ad A d, seu D A ad A r, ut quadratū A f ad quadratum A D, sive quadratum r g ad D G. Jam sic: ducta a b Cycloidis tangens quantumvis parva, & duabus prædictis ordinatis quantumvis proximis intercepta, erit utique parallela ipsi A f, ex dictis in Hugenianis *cap.* 8. *num.* 7. erit ergo a b ad intervallum ordinatarum r r, ut A f, seu r g ad dia-

diametrum A D; & hoc semper; rectangulū igitur g r r æquale erit rectangulo ex A D in a b; & omnia rectangula g r r, exhaurientia spatium infinitum g G D A h, æqualia rectangulo ex A D in curvam semi-cycloidis A a O, quam innumeræ tāgentes a b perinde exhauriunt; ergo A D in A a O ad quadr. ejusdem A D, scilicet curva ipsa A a O ad diametrum A D, est ut spatium g G D A h ad inscriptum diametri quadratum G D A H; hæc autem est proportio dupla, ut ipse *cap.* 8. *numer.* 11. Hugenianorum generaliter docui, atque ipsemet frater tuus supra laudatus in Geometr. mot. l. 1. prop. 12. pridem ostendit; itaque curva semi-cycloidis A a O dupla erit diametri, & tota Cyclois ejusdem quadrupla, quin & partes singulæ A a duplæ chordarum sibi correspondentium a d, utì aliis Geometris per alias vias pridem innotuit, Hugenio præsertim, ex præclara Evolutarum Curvarum inventione. Est verò generalis hæc methodus, si rem propiùs aspicias, atque ad omnes prorsus illas curvas exporrigitur, quas *cap.* 8. *num.* 5. Hugenianorum, *Correlatas* voco, ex quibus scilicet, per simplicissimam Euclidis elem. l. 1. proposit. 43. innumerarum figurarum dimensionem derivavi.

18 Duo hìc intereà adnotare non pigeat. Alterum, quòd si cylindricus erectus super semi-cycloide O a A D secari intelligatur plano quomodolibet inclinato, transeunte per basim O D, semper abscissa superficies ungularis in planū explicata in parabolam notam abibit; siquidem chordæ circuli A d, ad respectiva puncta r diametri A D applicatæ, parabolam efficiunt, ergo & earum duplæ, nēpe portiones curvæ cycloidalis a A, ad eadem diametri puncta, vel ad proportionales partes altitudinis illius ungulæ, applicatæ, parabolam item conficient; sed omnis superficies un-

gu-

gularis conflatur ex similibus curvæ portionibus applicatis ad partes, altitudinis proportionales partibus diametri basis, uti constat ex hac figura, ubi AQSEIMGO sit cylindricus




super quavis curva IOGM, sectus plano AZMI, per basim MI transeunte, manifestum est, superficiem ungularem AZMGO conflari ex portionibus curvæ BZ (æqualibus abscissis à vertice OG) applicatis ad puncta B dividentia altitudinem ungulæ AO in eadem ratione, in qua axis curvæ OI secatur in F per applicatam GF: Unde si fingamus OGM esse Cicloidem, cujus portiones OG duplæ sunt chordarum semicirculi sibi respondentis, idest quarum quadrata sunt, ut axis abscissæ OF, manifestum erit, Ungulam Cycloidalem AZMO esse parabolam, quia quadratum curvæ OGM erit ad quadratum curvæ BZ æqualis ipsi OG, ut OI ad OF, seu BN, idest, ut altitudo OA ad AB, ac perimeter AZM erit æqualis curvæ parabolicæ, imò in parabolam etiam positione

ta-

talem abibit, rectificatis curvis O M, B Z per explicationem ungulæ in planam superficiem, & è contra reliqua superficies A Z M S in trilineum parabolicum extendetur; quo statim constat (ob proportionalitatem Ungularum, tum superficialium, tum solidarum, cum superficiebus, aut molibus rotundorum corporum ab eadem figura) superficiem rotundam ex Cycloide circa basim, duplam esse rotundæ superficiei ab eadem circa tangentem verticis conversa; necnon distantiam centri gravitatis curvæ cycloidalis à basi duplam esse distantiæ ejusdem à vertice, &c. facilèque hinc habetur dimensio utriusque ex illis rotundis superficiebus, ob notam curvæ longitudinem, & centri gravitatis distantiam, juxta regulam celeberrimam Guldini Vestri circa genesim rotundorum.

19 Alterum, quod notari attentiùs velim, inde nullo negotio consequitur, nempe, data qualibet plana superficie, quæ à curva qualibet linea definiatur, posse nos ejusmodi superficiem ita curvare, seu tali cylindrico circumvolvere, ut eadem curva linea nihilominus in uno plano jaceat (quemadmodùm in casu prædicto, curva parabolica A ZM ita advolvitur cylindro cycloidali, ut nihilominus in uno, eodemque plano A I M, cylindrum secante, jaceat) seu cylindrum invenire, ex cujus sectione, eadem curva in superficiem ungularem convoluta efformetur. Propositum siquidem obtinebimus, alteram superficiem I O G M ita efformando, ut quæ fuerat in data figura relatio ordinatarū ad axem, eadē sit curvæ portionū O M, O G pariter ad axē suum (ut in exemplo nostro, quæ est in cycloide portionū curvæ à vertice abscissarū ad axis sui partes ordinatis abscissas) enimverò super ejusmodi curva sic inventa erecto cylindrico, ipsi advolvetur data figura, & suæ perimetri partes in eodem plano, ad datæ figuræ altitudinem ipsummet cylindrum transversim secante, dispositas habebit, semper autem tangens figuræ quæsitæ O G M ad punctum G, intercepta eodem puncto, & ordinata per verticem O, erit = subtangenti datæ figuræ A Z M, idest interceptæ inter punctū Q, & occursum tangentis puncti Z (explicato parallelogrammo A S M O cum sua curva AZ M) ut in exemplo cycloidis, cjus tangens subdupla est curvæ O G, quemadmodū ipsius A Q

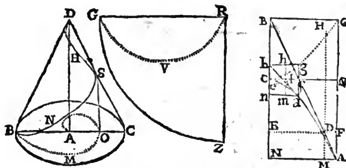
Dd sub-

ſubdupla foret ſubtangens parabolæ explicatæ; id quod aliàs generaliter monuimus *cap.5. num.* 2. & facillimè demonſtratur ex dictis *cap.* 13. *num.5.*

Exemplum aliud ſe ſe obvium præbet in ipſa Logiſtica, ſeu Logarithmica, quam ſi velis ex aliquo cylindro ſecare, aut cylindrum invenire, cui advolvatur, ita ut curva nihilominus in uno plano jaceat, id elegantiſſimè obtinebis per cylindrum ſuper Tractoria erectum, quandoquidem relatio ordinatarum Logiſticæ ad axem mutatur in relationem earumdē ad curvam in Tractoria, utì oſtendimus *cap. 5. tit. nu.* 2. Concipiatur verbi gratia in plano horizontali D F B erecta ad punctum B haſta quædam ſolidiori baſi marmoreæ B infixa; mox alligata baſi catenula aliqua F B, longitudine æquali parametro, ſeu ſubtangenti datæ Logiſticæ, ejus extremum F trahatur per rectam F D; utique baſis catenulam ſequens deſcribet Tractoriam curvam B N M, & haſta baſi infixa curvam quamdā ſuperficiem cylindricam ſuper ipſa Tractoria erectam; hæc igitur ſecari intelligatur plano aliquo per axē Tractoriæ F D tranſeunte, ad altitudinem extremæ ordinatæ in Logiſtica propoſita, dico ſuperficiem ungularem inde abſciſſam fore nil aliud, quàm ipſammet Logiſticam tali cylindro advolutam; quippe ſi plani inclinatio fuerit per 45. gradus, itaut Logiſticæ ordinata æquetur ſubtangenti ejuſdem, ſeu erecta in ungula illa cylindrica ad punctum B adæquet catenulā B F, conſtat, omnes erectas ad puncta N, M æquales fore ordinatis Tractoriæ N P, unde qualis eſt relatio ipſarum ad curvam B N, talis erit relatio applicatarum illius ungulæ ad ſuum axem, qui illi curvæ B N congruere intelligitur, & explicata illa ſuperficie in planum B S S, utriuſq; ordinatis B F, & axe F D coincidentibus, erit quælibet axi Logiſti-

sticæ parallela A S æqualis curvæ B N Tractoriæ per dicta *cap.* 13. Hugenianorum *num.* 5. Possem & modum inferere, quo figura quælibet ita complicari in cylindrum posset, ut ejus curva ad conicam superficiem terminaret; sed ne longiùs digrediar,

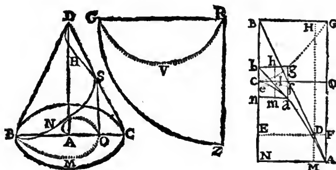
20 Jam ad institutum redeo, & cylindricam illam superficiem super spirali erectam, ac cono interclusam contemplor; utique perpendiculares O S super helicis punctis erectæ, & ad coni superficiem terminatæ, proportionantur differentiis radiorum, est enim D A ad O S, ut C A, seu A B ad C O;




itaque exposita parabola C a A hanc spiralem B O A æquante, si ad singula puncta a peripheriæ parabolicæ erigi intelligantur æquales differentiis ordinatarum ( ubi angulus D C A, trianguli per axem coni semirectus fuerit ) iisve proportionales in ratione axis coni D A ad basis radium A C ( ubi ille angulus major, aut minor fuerit semirecto ) seu si cylindrica superficies super C a A perimetro parabolæ erecta secari intelligatur plano per A Φ transeunte, ac tantumdem basi inclinato, ac latus coni radio basis inclinetur, scilicet per angulum D C A, quomodo erectæ manebunt in superficie cylindrica quæsitæ ordinatarum differentiis ( adeòque & differentiis æqualium radiorum circuli A C ) proportionales, quippe correspondentes applicatis trilinei parabolici C a A Φ, erit un-

 gu-

gula ex tali superficie cylindrica, basi, & plano secante interjecta eadem prorsus, quæ super spirali A O B priùs erigebatur, & cono conclusa manebat; Perimeter autem ungulæ cylindri parabolici est parabolæ æqualis, utì constare potest ex propos. 3. Append. nostræ Vivian. Probl. itaque explicata in rectam spirali B O A, curva B S H D, non quidem in parabolam, quæ talis positione sit, sed in ungulæ parabolicæ perimetrum abitura est, æqualem longitudine cuidam parabolæ, cujus rectum latus sit ad latus rectum prioris C a A, ut lateris coni D C quadratum ad quadratum radii A C, axis longitudine ipsi C N æquali remanente; id quod etiam immediatiùs,



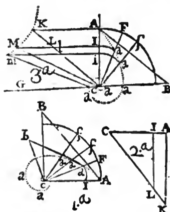

& absque tot ambagibus colligitur, ex quò ipse demonstraveris curvam B S H D esse spiralem conicam, quæ evoluta in Archimedeam spiralem abeat, per superiùs dicta *num.* 15. utique ejusmodi parabolæ æqualem.

21 Dimensio autē ipsius superficiei cylindricæ D H S B O A habebitur, ex rectangulo axis A D in ipsam spiralem A O B, vel huic æqualem parabolam C a A, subtrahendo tale spatium, quod ad portionem ejusdem parabolæ, duabus ad axem ordinatis interceptam, quarum altera ex foco, altera tantò infra ipsum, quantus est totus axis, sit in ratione axis D A ad radiū A C; residuum quippe erit spatium ungulæ suprà determinatæ; id quod analyticè sic describi potest. Radius A C sit $=$ *r*, & $\frac{1}{4}$ ba-

basis quadraticis inscribendæ quadranti circulari radii A C (vel semissis lateris recti parabolæ C a N, idest tertiæ proportionalis post semiperipheriam, & radium) sit $= c$; quæ verò utriusque potest quadratum (quæ scilicet foret parabolæ perpendicularis in A) esto $= u$; axis coni A D esto $= a$; superficies hyperbolæ æquilateræ interceptæ semitransverso æquali ipsi $c$, & ordinata ad rectæ diametri portionem æqualem ipsi $r$, esto $bb$. Erit cylindrica superficies spirali imminens, & cono conclusa A D H S B O A $= \frac{abb}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r}$; nam linea spiralis, seu parabolica, utpote cum $c$ continens rectangulum $= bb$, erit $\frac{bb}{c}$, tota igitur cylindrica superficies spirali imminens, & usque ad apicem coni completa, erit $\frac{abb}{c}$ Verùm inde subtrahenda est Ungula superior, cujus spatium, ad portionem parabolæ interceptam ordinatis, $c$ ex foco, & $u$ tantò longiùs ab ipso, quanta est semissis circumferentiæ, seu axis datæ parabolæ, sit in ratione $a$ ad $r$; cùm verò integræ portiones parabolæ, abscissæ à vertice per ordinatas $u$, & $c$ sint, ut $u^3$ ad $c^3$; dividendo, portio truncata intercepta ordinatis, $u$, $c$ erit ad portionem interjectam vertici, & minori ordinata $c$, ut $u^3 - c^3$ ad $c^3$; estque portio interjecta vertici, & foci ordinata $c = \frac{1}{3} cc$; igitur truncata illa portio ordinatis $c$, & $u$ intercepta erit $\frac{u^3}{3c} - \frac{cc}{3}$; & quæ ad hanc est in ratione $a$ ad $r$ erit $\frac{au^3}{3rc} - \frac{acc}{3r}$; qua subtracta ex $\frac{abb}{c}$ fit $\frac{abb}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r}$ = cylindricæ illi portionis spiraceæ B S H D A O B cono inclusæ.

22 Nihil, ut arbitror, attinet contemplationem ulteriùs extendere, quum omnia ipse mentis excursu jam præoccupaveris, sed si optaris ejusmodi spiraceæ cylindricæ superficiei portionem, qua explicata in planum, rectificata perimetro B O A, etiam B S H D in rectam abeat, sume spiralem Geo-

metricam A a C; nam & in coni ſuperficie ſimilem ſpiralem habebis (utì eodẽ tuo ratiocinio conſtat) quæ potentia æqualis erit ipſi C a A, & axi coni ſuper illa perpendiculariter erecti,



propter radios A C, a C proportionales curvæ portionibus C a A, C a a ab ipſo centro abſciſſis, ut colligitur ex dictis *cap.* 5. Hugenianorum *num.* 10. adeòque & differentias radiorum F a, f a curvæ portionibus A a reſpondentes.

Hæc habui, quæ raptim ad Te ſcriberem Vir Clariſſ. & quæ Tuis elegantiſſimis ſpeculationibus reponerem; de controverſia autem Mechanica, quæ hactenus nos commiſit, erit aliàs differendi locus, eſto enim utilior ſit Statica illa diſſertatio, jucundior tamen, minùſque in lubrico poſita, Geometricarum rerum ſedula meditatio. Vale, meque, ut facis, amare perge; quamquàm, non eſt cur de hoc ſim ſollicitus, inſitæ enim Humanitatis tuæ ſtimulos habes, quibus in id incitaris. Dabam Kal. Aug. &c.

# APPROBATIONES.

Librum, cui titulus est, *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum*, elaboratum ab Adm. Rev. & Excell. P. D. Guidone Grandi Monacho Camald. Matheseos Professore, & in Almo Pisarum Collegio Philosophiæ publico Lectore, de mandato Reverendiss. P. Generalis attentè perlegi: Et cùm nihil in eo reperiatur, quod Catholicæ Fidei, bonisque moribus adversetur, existimo posse Typis mandari: imò ut mandetur, debita Matheseos Amatoribus, ipsisque mathematicis disciplinis, justitia exigit. Petunt enim istæ, quæ (licèt magna ex parte nova) sua tamen sunt, ac pleno jure ad ipsas pertinent. Exigit etiam Religionis decor, ut Auctoris ingenium, & inveniendi fœcunditas magis per Orbem patefiat, ne sibi debita laude fraudetur. Ita, &c. D. Martinus Angelus Franchi Monachus ejusdem Congreg. S. T Mag. & in Monasterio Angelorum Florentiæ Prior. Dat. Florentiæ ex d. Monasterio hac die 16. Julii 1701.

IN Geometrica Demonstratione Theorematum Hugenianorum Adm. Rev. & Exc. P. D. Guidonis Grandi in Pisano Atheneo Publici Phil. Profess. & S. Th. Mag. quem jussu Reverendiss. P. Gener. Ordinis nostri diligenter expendi, nihil occurrit, quod S. Fidei Catholicæ, bonisve moribus adversetur, imò cùm innumeras Geometricas veritates generalissimis, ac facillimis variarum demonstrationum methodis ejusmodi Opusculo maximè illustratas invenerim, Litterariæ Reipublicæ interesse judico, ut illius editio minimè ulteriùs differatur. Ita sentio ex Monast. Angelor. Flor. XVII. kal. August. ego D. Silvanus Ciapetti Monach. Camald. S. T. M. & in præfato Monast. Philos. Lector.

NOS D. DAMASCENUS DE MUTIIS ABBAS SS. HIPPOL. Et Laurentii de Faventia, & totius Camald. Ord. Generalis.

CUM Opus inscriptum, *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum, &c. P. D. Guidonis Grandi in Pisano Atheneo Lectoris, & nostræ Congregat. Monachi*, duo ex eadem Congregat. S. Theol. Magistri, quibus id commissum fuit, recognoverint, ac in lucem edi posse probaverint, facultatem facimus, ut Typis mandetur, si iis, ad quos spectat, videbitur. Datum Faventiæ ex nostro Monast. SS. Hippoliti, & Laurentii die 21. Julii 1701.

*D. Damascenus de Mutiis Abbas Gener. Camald.*

Loco ✠ Sigilli.

*D. Marius Felix Ferrari Canceil. Congr.*

IL Molto Rev. P. Giovanni Scarlatti della Compagnia di Gesù riveda la presente Opera Matematica del M. R. P. Guido Grandi Monaco Camaldolense, e referisca se vi sia cosa contro la S. Fede, e buoni costumi. Dat. adì 20. Luglio 1701.

*Tommaso della Gherardesca Vic. Gen.*

De mandato Illustriss. & Reverendiss. D. Comitis Thomæ de Gherardeschis Vicarii Generalis Florentini, ego infrascriptus legi, & attentè consideravi Librum, cui titulus est, *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam, seu Logarithmicam lineam*, compositum ab Eruditissimo Viro D. Guidone Grando Cremonensi Monaco Camaldulensi, & in Almo Pisano Lyceo Publico Philosophiæ Professore, nihilque in eo reperi, quod Catholicæ Fidei, vel bonis moribus adversetur, imò verò dignum existimo pro litteratorum eruditione, qui Typis mandetur; gratumque spero futurum omnibus strictè Mathesis Professoribus.

*Ego Joannes Scarlattus Societatis Jesu.*

Imprimatur, stante prædicta relatione
*Thomas de Gherardesca Vic. Gen.*

DE mandato Rev. P. Inquisit. Gener. Flor. A. R. P. M. Antonius Franciscus Cioppi Min. Conv. Consultor hujus S. Officii legat perattentè, uti solet, præsentem Librum, cui titulus est, *Geometrica Demonstratio, &c.* & referat, an ejusdem possit permitti impresio. Dat. in S. Off. Flor. die 24. Julii 1701.

*F. Lucius Augustin. Cecchini de Bon. Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Fl.*

JUssu Paternitatis Tuæ Reverendiss. attentè perlegi Librum, cui titulus est, *Geometrica Demonstratio, &c.* compositum ab Erudito Viro D. Guidone Grando Cremonensi, Monaco Camaldul. & in Almo Pisarum Lyceo Publico Philosophiæ Professore, nec in eo aliquid inveni, quod Catholicæ Fidei, nec bonis moribus adversetur, ideò dignum existimo, ut Typis mandetur. Datum Flor. die 27. Julii 1701. ita sentit

*F. Antonius Franciscus Cioppi Min. Conv. Consult. S. Off. Flor.*

Attenta suprapofita relatione Imprimatur
*F. Lucius August. Cecchini de Bon. Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Flor.*

Philippus Bonarota Senat. & Regiæ Celsitud. Auditor.